

TEOREMAS DE GEOMETRÍA

Contenidos

Artículos

Teorema de Barbier	1
Teorema de De Gua	2
Teorema de Desargues	3
Teorema de rotación de Euler	4
Teorema de Jung	6
Teorema de Apolonio	7
Teorema de Menelao	10
Teorema de Mohr-Mascheroni	11
Teorema de Morley	12
Teorema de Napoleón	14
Teorema de Ptolomeo	15
Teorema de Poncelet–Steiner	17
Método exhaustivo	17
Sangaku	18
Trilateración	25
Diagrama de Schlegel	27
Teorema de Casey	29
Teorema de Brahmagupta	30
Teorema de la bisectriz	31
Teorema de Pick	34
Teorema del centroide de Pappus	36
Teorema del hexágono de Pappus	37
Teorema de Routh	38
Semejanza (geometría)	39
Sexteto de Soddy	44
Teorema de Steiner-Lehmus	46
Teorema de Stewart	47
Teorema de Brianchon	48
Teorema de Carnot	49
Teorema de Ceva	50
Teorema de la mariposa	51
Teorema de los círculos de Descartes	52
Teorema de Marden	53
Teorema de Tales	55

Teorema de Taniyama-Shimura	60
Teorema de Varignon	61
Teorema de Viviani	64
Teorema de Lambert	65
Ceviana	66
Teorema de Pascal	66

Referencias

Fuentes y contribuyentes del artículo	68
Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes	70

Licencias de artículos

Licencia	72
----------	----

Teorema de Barbier

El **Teorema de Barbier** es aquel que define las características que ha de cumplir una curva para ser de longitud constante.

Según el Teorema de Joseph Emile Barbier, una curva es de longitud constante si su perímetro es igual a la distancia a la que se encuentran las rectas paralelas con respecto a las que su longitud es constante.

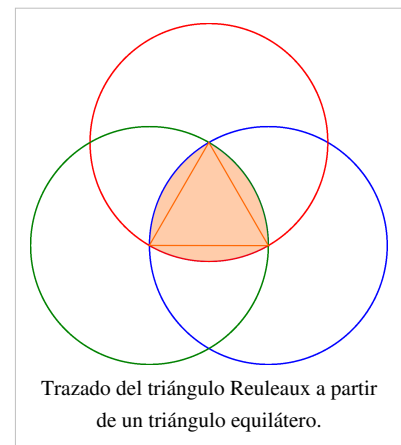
Ejemplos

El círculo

El círculo es la curva de longitud constante más evidente: puede ser rotada entre dos segmentos paralelos separados por una distancia constante. El círculo cumple el Teorema de Barbier, ya que su perímetro ($\pi \cdot d$) es igual a la distancia que separa las paralelas multiplicadas por π ($\pi \cdot d$).

El Triángulo de Reuleaux

El Triángulo de Reuleaux es un caso de curva de longitud constante no tan evidente como el del círculo. La construcción de este triángulo se hace a partir de un triángulo equilátero ABC, dibujando los arcos BC usando como centro el vértice A, CA con centro en B, y AB con centro en C. Analizando el Teorema de Barbier, el valor del perímetro del Triángulo de Reuleaux es tres veces la longitud de un arco cuyo radio es la distancia entre las paralelas. Dicho arco tiene un ángulo de 60° , es decir, $\pi/3$. Por lo tanto, su perímetro es $3 \cdot (d \cdot \pi/3)$, es decir, $\pi \cdot d$, valor que coincide con la distancia entre las paralelas multiplicada por π ($\pi \cdot d$).



Enlaces externos

- Bogomolny, Alexander. «The Theorem of Barbier^[1]» (en inglés). *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*^[2].

Referencias

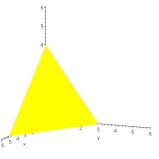
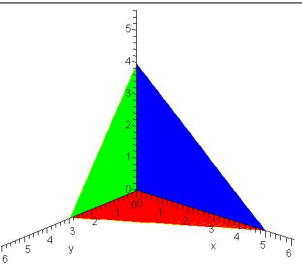
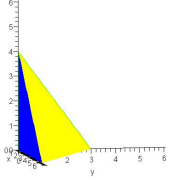
[1] <http://www.cut-the-knot.org/ctk/Barbier.shtml>

[2] <http://www.cut-the-knot.org/index.shtml>

Teorema de De Gua

El **teorema de De Gua**, llamado así en honor al matemático francés Jean-Paul de Gua de Malves, es un análogo en tres dimensiones del teorema de Pitágoras. Este teorema establece que si un tetraedro posee un vértice formado por ángulos rectos (como en el caso de los vértices de un cubo), entonces el cuadrado del área de la cara opuesta a dicho vértice es igual a la suma de los cuadrados de las áreas de las otras tres caras. A partir de las figuras:

$$A_{\text{amarilla}}^2 = A_{\text{roja}}^2 + A_{\text{azul}}^2 + A_{\text{verde}}^2$$

Vista frontal: cara opuesta al vértice.	Vista trasera: caras que forman los ángulos rectos del vértice	Vista lateral
		

El teorema de Pitágoras y el teorema de De Gua son casos especiales (para un número de dimensiones $n = 2$ y $n = 3$ respectivamente) de un teorema general para un simplex que posea un vértice con un ángulo recto.

Referencias

- Esta obra deriva de la traducción de «De Gua's theorem», concretamente de esta versión ^[1], publicada bajo la Licencia de documentación libre de GNU y la Licencia Creative Commons Atribución-CompartirIgual 3.0 Unported por editores ^[2] de la *Wikipedia en inglés*.
- Álvarez, Sergio A. «Note on an n -dimensional Pythagorean theorem» ^[3], Universidad Carnegie Mellon (en inglés).
- GoGeometry from the Land of the Incas (2007), «De Gua's Theorem, Pythagorean theorem in 3-D» ^[4] (en inglés). Consultado el 6 de junio de 2010.
- Weisstein, Eric W. «de Gua's Theorem ^[5]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research. Consultado el 6 de junio de 2010.

Referencias

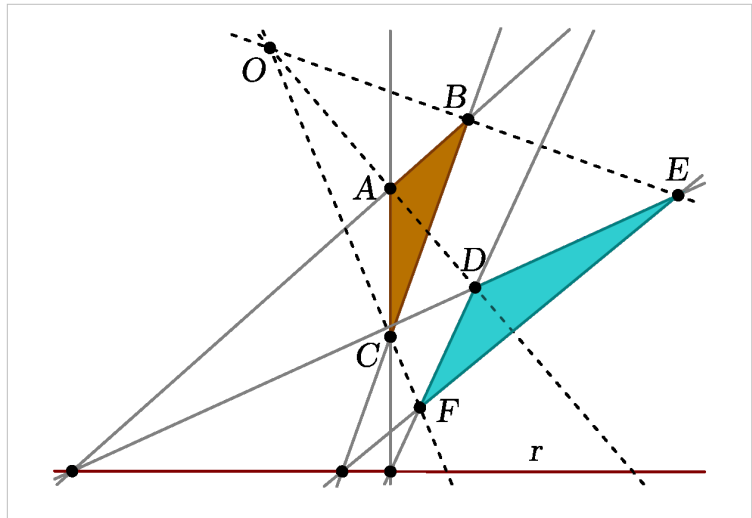
- [1] http://en.wikipedia.org/wiki/De_Gua%27s_theorem?oldid=360383875
- [2] http://toolserver.org/~daniel/WikiSense/Contributors.php?wikilang=en&wikifam=.wikipedia.org&page=De+Gua%27s+theorem&grouped=on&hidebots=on&hideanons=on&order=-edit_count&max=200&order=first_edit&format=html
- [3] <http://www.cs.bc.edu/~alvarez/NDPyt.pdf>
- [4] http://www.gogeometry.com/solid/gua_theorem.htm
- [5] <http://mathworld.wolfram.com/deGuasTheorem.html>

Teorema de Desargues

En geometría proyectiva, el **teorema de Desargues**, llamado así en honor a Gérard Desargues expone:

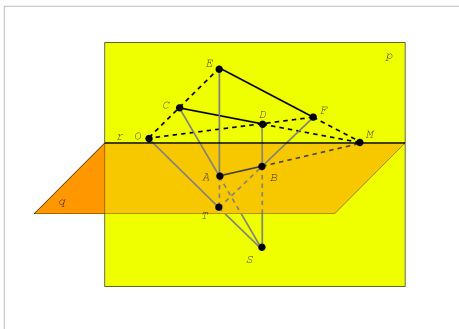
En el plano proyectivo, dos triángulos son perspectivos desde un punto si y sólo si son perspectivos desde una recta.

Considere los triángulos ABC y DEF . El que los triángulos sean *perspectivos desde un punto* significa que las rectas AD , BE y CF concurren en un mismo punto O . De modo parecido, el que los triángulos sean *perspectivos desde una recta* significa que los pares de lados (AB, DE) , (BC, EF) y (AC, DF) se cortan respectivamente sobre una misma recta r .



Al punto O se le llama *centro de perspectiva* y a la recta r , *eje de perspectiva*.

Demostración del teorema



Para demostrar este teorema, considere los planos p y q secantes en la recta r . Sea AB un segmento sobre el plano q y M la intersección de la recta AB con la recta r . Sean S y T dos puntos exteriores a dichos planos. Sean C y D las proyecciones sobre el plano p de los puntos A y B desde el punto S y E y F las proyecciones del mismo segmento AB desde el punto T sobre el plano p .

El plano determinado por los puntos SAB corta al plano p sobre la recta CD . El punto M se encuentra sobre el dicho plano, por estar sobre la recta AB y por esta razón M se halla sobre la recta CD . Usando los

mismos argumentos, pero considerando ahora el plano TAB , se demuestra que el punto M es común a las rectas AB y EF . Así, las rectas CD y EF se cortan en el mismo punto M sobre la recta r .

Sea O la intersección de la recta ST sobre el plano p . El plano STA corta al plano p sobre la recta CE que contiene al punto O . De manera similar, el plano STB corta al plano p en la recta DF que también contiene al punto O . Por tanto, las rectas CE y DF se cortan en dicho punto.

De modo que los pares de puntos C, E y D, F son proyectivos desde el punto O . Las rectas CD y EF son proyectivas desde la recta r .

El recíproco también es cierto: Si las rectas CD y EF en un mismo plano p , son proyectivas desde una recta r y los puntos correspondientes C, E y D, F son proyectivos desde un punto O en dicho plano, entonces existe un plano q , secante al plano p en r , una recta AB sobre dicho plano y un par de puntos exteriores a ambos planos desde los cuales la recta AB se proyecta sobre CD y EF , el punto A sobre C y E y el punto B sobre D y F .

En el teorema de Desargues, podemos considerar los triángulos como las proyecciones de un único triángulo sobre algún plano q desde dos puntos distintos S y T . La recta r y el punto O son respectivamente, la intersección del plano q con aquél donde los dos triángulos son perspectivos, y la intersección de la recta ST con aquél plano. Los vértices correspondientes en ambos triángulos serán proyectivos desde el punto O y los lados correspondientes de ambos triángulos serán proyectivos desde la recta r . Esto demuestra el teorema

Referencias

- Luigi Cremona, *Elements of Projective Geometry* third edition, Dover 2005 ISBN 0-486-44266-7

Teorema de rotación de Euler

En geometría el **Teorema de la rotación** de Euler dice que, en un espacio tridimensional, cualquier movimiento de un sólido rígido que mantenga un punto constante, también debe dejar constante un eje completo. Esto también quiere decir que cualquier composición de rotaciones sobre un sólido rígido con ejes arbitrarios es equivalente a una sola rotación sobre un nuevo eje, llamado Polo de Euler. Al ser la combinación de rotaciones otra rotación, el conjunto de las operaciones de rotación tiene una estructura algebraica conocida como grupo. En concreto al grupo de rotaciones se le conoce como "grupo especial ortogonal de dimensión 3" o $SO(3)$

El teorema toma su nombre de Leonhard Euler, que lo demostró en 1775 con un argumento geométrico. La extensión de este concepto a la cinemática da el concepto de Eje instantáneo de rotación.

En términos de álgebra lineal, esto también quiere decir que el producto de dos matrices de rotación es también una matriz de rotación y que todas ellas tienen un único autovalor real que debe ser la unidad.

Teorema de Rotación de Euler(1776)

Euler enuncia su teorema de la siguiente forma:^[1]

Theorema. Quomodocunque sphaera circa centrum suum conuertatur, semper assignari potest diameter, cuius directio in situ translato conueniat cum situ initiali.

que en traducción libre sería:

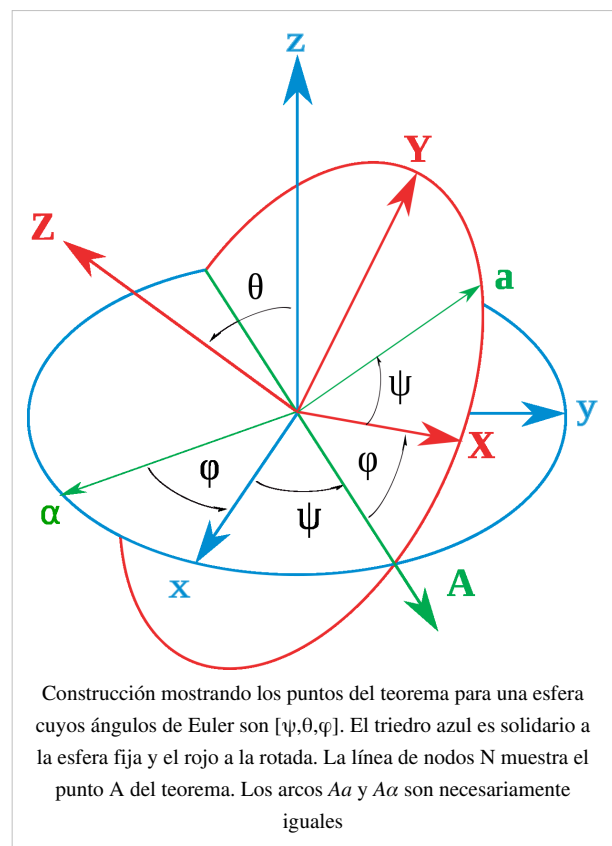
Rotando una esfera de forma arbitraria alrededor de su centro, siempre es posible encontrar un diámetro cuya posición tras la rotación es igual que la inicial

Para probar esto Euler primero toma un círculo máximo de la esfera fija y el círculo máximo correspondiente tras la rotación en la esfera rotada. Estos dos círculos se intersecan en dos puntos opuestos. Escogemos uno cualquiera A . Este punto está en el círculo inicial luego es transportado a otro punto a del segundo círculo. Pero también, A está en el círculo transportado, y por tanto corresponde a un punto α en el círculo inicial. En este punto, nótese que el arco aA debe ser igual al arco $A\alpha$.

Ahora Euler necesita un punto O en la superficie de la esfera situado de forma simétrica respecto de a y A . Si tal punto existe debe cumplir:

- Las distancias OA y Oa son iguales; los arcos Oa y OA también.
- Los arcos OA y Oa deben estar igualmente inclinados hacia los círculos y los arcos OaA y $OA\alpha$ deben ser iguales.

Euler define dos planos:



- El de simetría del ángulo αAa (que pasa por el centro C de la esfera), y
- El de simetría del arco Aa (que también pasa por C).

Proposición. Estos dos planos se intersecan en un diámetro de la esfera, el cual permanece fijo tras el movimiento.

Dem. Los planos se intersecan en un diámetro porque ambos pasan por el centro de la esfera. Sea O cualquiera de los puntos (hay dos) de corte del diámetro con la superficie de la esfera. Como αA se mueve a Aa y los triángulos tienen los mismos ángulos, el triángulo $O\alpha A$ se convierte en el triángulo OAa . Por tanto O debe permanecer fijo tras el movimiento. Lo mismo para el centro de la esfera y el punto antípoda de O .

Demostración algebraica

Una demostración matricial es posible teniendo en cuenta que una rotación se representa por una matriz ortogonal, es decir una tal que:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{E},$$

donde \mathbf{E} es la identidad y T indica la traspuesta. Una matriz ortogonal tiene determinante ± 1 , siendo el $+1$ el característico de las de rotación.

$$1 = \det(\mathbf{E}) = \det(\mathbf{R}^T \mathbf{R}) = \det(\mathbf{R}^T) \det(\mathbf{R}) = \det(\mathbf{R})^2 \implies \det(\mathbf{R}) = \pm 1.$$

La matriz de rotación \mathbf{R} tiene al menos un autovector \mathbf{n} con autovalor $\lambda = 1$.

$$\det(-\mathbf{R}) = (-1)^3 \det(\mathbf{R}) = -\det(\mathbf{R}) \quad \text{and} \quad \det(\mathbf{R}^{-1}) = 1,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{R} - \mathbf{E}) &= \det((\mathbf{R} - \mathbf{E})^T) = \det((\mathbf{R}^T - \mathbf{E})) = \det((\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{E})) = \det(-\mathbf{R}^{-1}(\mathbf{R} - \mathbf{E})) \\ &= -\det(\mathbf{R}^{-1}) \det(\mathbf{R} - \mathbf{E}) = -\det(\mathbf{R} - \mathbf{E}) \implies \det(\mathbf{R} - \mathbf{E}) = 0 \end{aligned}$$

luego $\lambda = 1$ es raíz de la ecuación

$$\det(\mathbf{R} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad \text{for} \quad \lambda = 1.$$

Habrà al menos un vector \mathbf{n} , para el que

$$(\mathbf{R} - \mathbf{E})\mathbf{n} = \mathbf{0} \iff \mathbf{R}\mathbf{n} = \mathbf{n}$$

La línea dada por el espacio de todos los autovectores del autovalor 1 es el eje de Euler.

Notes

[1] Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 20, 1776, pp. 189-207 (E478)

Teorema de Jung

En geometría, el **teorema de Jung** es una desigualdad matemática entre el diámetro de un conjunto de puntos contenidos en un espacio euclídeo y el radio de la mínima n -esfera que contiene al conjunto. El teorema fue publicado por Heinrich Jung en 1901.

Enunciado

Sea K un conjunto finito de puntos (o más generalmente un conjunto compacto cualquiera)

$$K \subset \mathbb{R}^n$$

y sea

$$d = \max_{p, q \in K} \|p - q\|_2$$

el diámetro de K , es decir, la distancia más grande posible entre puntos del conjunto. Entonces se tiene que existe una $(n-1)$ -esfera de radio:

$$r \leq d \sqrt{\frac{n}{2(n+1)}},$$

que contiene a K . La igualdad se da siempre para el caso de un n -simplex regular.

Teorema de Jung en el plano

. El caso más común de aplicación del teorema es el plano euclídeo ($n = 2$), donde cualquier conjunto de finitos de puntos puede ser contenido en un círculo de radio dado por:

$$r \leq \frac{d}{\sqrt{3}}$$

El resultado anterior es el más ajustado posible, por ejemplo para un triángulo equilátero cuyos tres vértices están sobre una circunferencia

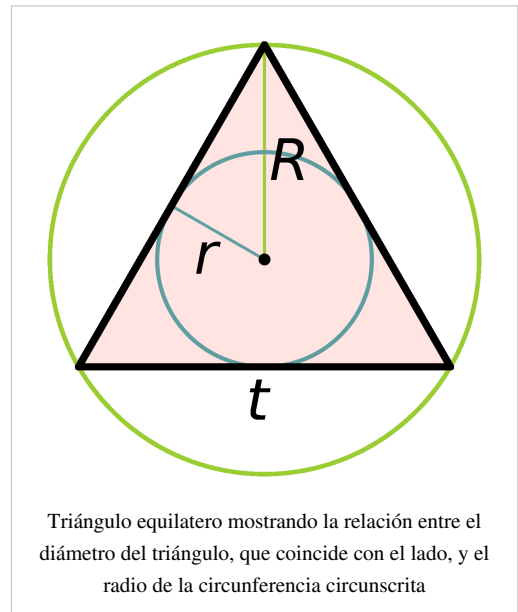
$$r = \frac{d}{\sqrt{3}}$$

Espacios métricas generales

Para un conjunto acotado S contenido en un espacio métrico se tiene:

$$\frac{d}{2} \leq r \leq d$$

La primera desigualdad es una consecuencia de la desigualdad triangular aplicada al centro de la una bola y dos puntos diametralmente opuestos. La segunda se sigue de que una bola de radio d centrada en cualquier punto de S debe contener todo el conjunto por la definición de diámetro de un conjunto arbitrario. En un espacio métrico uniforme, es decir un espacio métrico en el que todas las distancias son iguales se satura esta segunda desigualdad $r = d$. La otra desigualdad se alcanza en un espacio métrico inyectivo como el plano dotado de la "distancia de Manhattan", donde se tiene $r = d/2$.



Referencias

Bibliografía

- Katz, M.: Jung's theorem in complex projective geometry, *Quart. J. Math. Oxford* (2) 36 (1985) 451-466.
- Dekster, B. V. (1995). «The Jung theorem for the spherical and hyperbolic spaces». *Acta Math. Sci. Hungar.* **67** (4): pp. 315–331. doi: 10.1007/BF01874495 (<http://dx.doi.org/10.1007/BF01874495>).
- Dekster, B. V. (1997). «The Jung theorem in metric spaces of curvature bounded above». *Proceedings of the American Mathematical Society* **125** (8): pp. 2425–2433. doi: 10.1090/S0002-9939-97-03842-2 (<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9939-97-03842-2>).
- Jung, Heinrich (1901). «Über die kleinste Kugel, die eine räumliche Figur einschließt» (in German). *J. Reine Angew. Math.* **123**: pp. 241–257.
- Jung, Heinrich (1910). «Über den kleinsten Kreis, der eine ebene Figur einschließt» (in German). *J. Reine Angew. Math.* **137**: pp. 310–313.
- Rademacher, Hans; Toeplitz, Otto (1990). *The Enjoyment of Mathematics*. Dover. chapter 16. ISBN 978-0-486-26242-0.

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Jung's Theorem (<http://mathworld.wolfram.com/JungsTheorem.html>)» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.

Teorema de Apolonio

En geometría, el **teorema de Apolonio**, también llamado **teorema de la mediana**, es un teorema que relaciona la longitud de la mediana de un triángulo con las longitudes de sus lados.

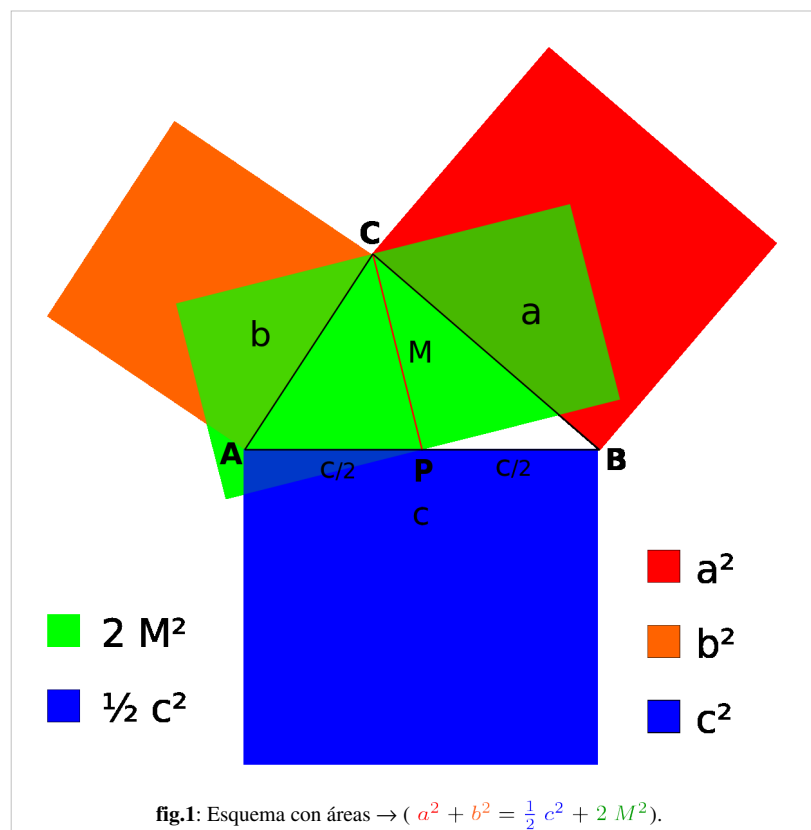
Teorema de Apolonio (teorema de la mediana)

Para todo triángulo la suma de los cuadrados de dos lados cualesquiera, es igual al la mitad del cuadrado del tercer lado más el doble del cuadrado de su mediana correspondiente.

Apolonio de Perga

Para cualquier triángulo $\triangle ABC$ (véase **fig. 1**), si M es la mediana correspondiente al lado c , donde $AP = PB = \frac{1}{2} c$, entonces :

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2} c^2 + 2 M^2$$



Afinidades

- Este teorema es un caso especial del teorema de Stewart.
- Para triángulos isósceles el teorema se reduce al teorema de Pitágoras.
- Teniendo en cuenta que las diagonales del paralelogramo se bisecan entre sí, puede concluirse que éste teorema es equivalente a la ley del paralelogramo.
- El nombre de este teorema es en alusión a Apolonio de Perga.^[1]

Sobre las demostraciones

Existen (o pueden existir) razones para no exponer las demostraciones originales, una de ellas sería que los documentos de dichas demostraciones no hayan llegado hasta nuestros días. Por otra parte, al existir en nuestros días más y mejores herramientas matemáticas, puede optarse (*aplicando el principio de parsimonia*) por exponer solo las demostraciones más sencillas.

Al igual que muchos otros teoremas éste puede ser demostrado de múltiples maneras, algunas de ellas serían:

- Como caso especial del teorema de Stewart.
- Usando vectores (véase ley del paralelogramo).
- Usando el teorema del coseno.

Demostración de Godfrey y Siddons

Demostración^[1] por medio del teorema del coseno. Sea un triángulo euclidiano cualquiera de lados a , b y c , para cuyo lado c se ha trazado la mediana correspondiente M_c (línea verde en la **fig. G&S**), donde (por definición de mediana) $m_c = n_c = \frac{1}{2} c$. La mediana M_c forma con el lado c los ángulos φ y φ' , siendo que φ abarca al lado b y φ' abarca al lado a , entonces de acuerdo al teorema del coseno podemos expresar:

(gs01)

$$b^2 = m_c^2 + M_c^2 - 2 m_c M_c \cos(\varphi)$$

(gs02)

$$a^2 = n_c^2 + M_c^2 - 2 n_c M_c \cos(\varphi')$$

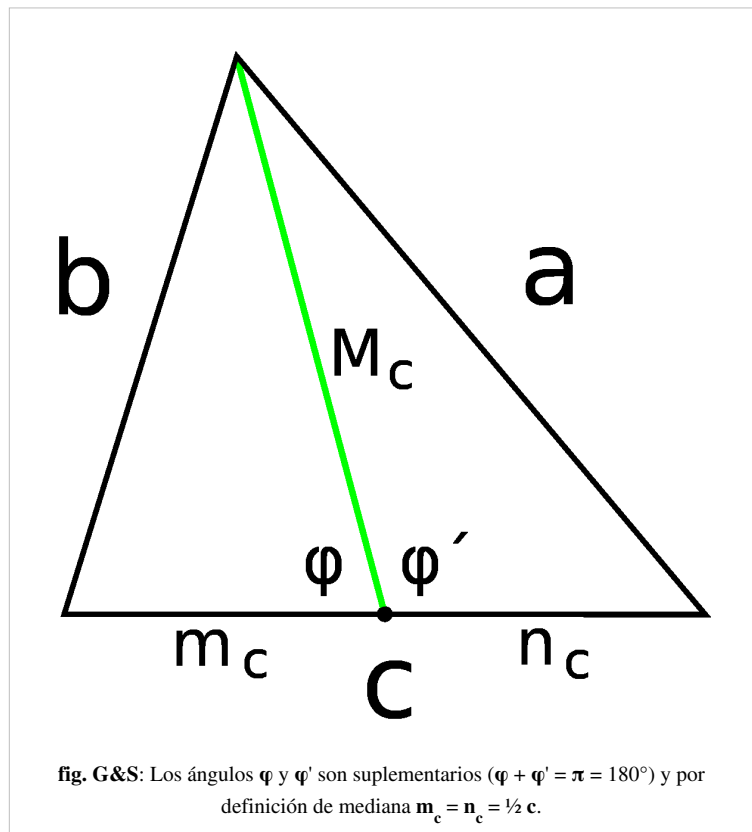
Reemplazando en (gs01) $m_c \rightarrow \frac{1}{2} c$ y en (gs02) $n_c \rightarrow \frac{1}{2} c$ y $\cos \varphi' \rightarrow -\cos \varphi$ (por ser φ' y φ ángulos suplementarios), y simplificando obtenemos:

(gs03)

$$b^2 = \frac{c^2}{4} + M_c^2 - 2 \frac{c}{2} M_c \cos(\varphi)$$

$$(gs04) \quad a^2 = \frac{c^2}{4} + M_c^2 + 2 \frac{c}{2} M_c \cos(\varphi)$$

Notar que los últimos términos de los miembros derechos de las ecuaciones (gs03) y (gs04) solo difieren en signo, luego sumando m.a.m. dichas ecuaciones y simplificando arroja:



$$(gs05) \ a^2 + b^2 = \frac{c^2}{2} + 2M_c^2$$

, □.[2]

La expresión anterior (gs05) es la conclusión final del teorema de Apolonio realizada para la mediana M_c , como se trata de una demostración general, con razonamientos similares se puede obtener las expresiones equivalentes para las restantes medianas M_a y M_b , las cuales serían:

$$(gs06) \ b^2 + c^2 = \frac{a^2}{2} + 2M_a^2$$

$$(gs07) \ a^2 + c^2 = \frac{b^2}{2} + 2M_b^2$$

Fórmulas de aplicación práctica

De las expresiones (gs05), (gs06) y (gs07) de la demostración (Godfrey y Siddons) del teorema de Apolonio (*teorema de las medianas*) pueden deducirse varias fórmulas prácticas (*válidas para cualquier triángulo*), éstas permiten calcular a partir del conocimiento de tres elementos, a un cuarto elemento desconocido, (*los elementos en cuestión son lados y medianas*). La siguiente tabla muestra un resumen de las mismas (*con notación acorde a la figura de la propia tabla*):

$M_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$		
$M_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2) - b^2}$		
$M_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$		
$a = \sqrt{2(b^2 + c^2) - 4M_a^2}$	$b = \sqrt{\frac{a^2}{2} - c^2 + 2M_a^2}$	$c = \sqrt{\frac{a^2}{2} - b^2 + 2M_a^2}$
$a = \sqrt{\frac{b^2}{2} - c^2 + 2M_b^2}$	$b = \sqrt{2(a^2 + c^2) - 4M_b^2}$	$c = \sqrt{-a^2 + \frac{b^2}{2} + 2M_b^2}$
$a = \sqrt{-b^2 + \frac{c^2}{2} + 2M_c^2}$	$b = \sqrt{-a^2 + \frac{c^2}{2} + 2M_c^2}$	$c = \sqrt{2(a^2 + b^2) - 4M_c^2}$
(Lados: a, b y c) — (Medianas: M_a, M_b y M_c) ^[3] — (Semilados: $m_a = n_a = \frac{1}{2}a$, $m_b = n_b = \frac{1}{2}b$ y $m_c = n_c = \frac{1}{2}c$).		

Notas y Referencias

[2] Unicode indica que el cuadrado relleno (◻), como símbolo matemático, significa ‘fin de la prueba’ (en inglés ‘end of proof’) o también QED (*Quod erat demonstrandum*).

[3] Déplanche, Y., *Diccio fórmulas*, 1996, Edunsa (publ.), "Medianas de un triángulo" pág. 25. (<http://books.google.com/books?id=1HVH0wAACAAJ>), isbn=9788477471196

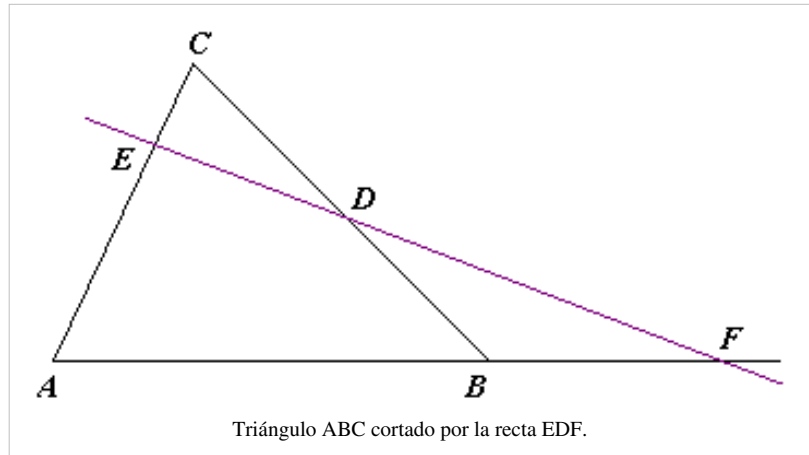
• Apollonius Theorem (<http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=>) en PlanetMath

Teorema de Menelao

El **teorema de Menelao**, atribuido a Menelao de Alejandría, es un teorema acerca de triángulos en geometría plana.

Teniendo en cuenta los puntos A, B, C que forman el triángulo ABC, y los puntos D, E, F que se encuentran en las líneas de BC, AC, AB, entonces el teorema establece que D, E, F son colineales si y sólo si:

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1$$



Enlaces externos

- Demostración del teorema de Menelao ^[1] en PlanetMath
- Bogomolny, Alexander. «Ceva and Menelaus Meet on the Roads ^[2]» (en inglés). *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles* ^[2].
- Bogomolny, Alexander. «Menelaus From Ceva ^[3]» (en inglés). *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles* ^[2].
- Menelaus and Ceva ^[4] en MathPages
- Warendorff, Jay. «Menelaus' Theorem ^[5]» (en inglés). *The Wolfram Demonstrations Project*. Wolfram Research.
- Weisstein, Eric W. «Teorema de Menelao ^[6]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.

Referencias

- [1] <http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=3092>
- [2] <http://www.cut-the-knot.org/4travelers/CevaAndMenelaus.shtml>
- [3] <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/MenelausFromCeva.shtml>
- [4] <http://www.mathpages.com/home/kmath442/kmath442.htm>
- [5] <http://demonstrations.wolfram.com/MenelausTheorem/>
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/MenelausTheorem.html>

Teorema de Mohr-Mascheroni

En geometría euclídea, el **teorema de Mohr-Mascheroni** establece que todas las construcciones geométricas que pueden realizarse con regla y compás pueden realizarse únicamente con compás. Hay que notar que aunque no puede trazarse con un compás una línea recta; dados dos puntos de la misma, es posible obtener un conjunto denso de puntos en la recta dada.

Enunciado e historia del teorema

En 1797 el matemático italiano Lorenzo Mascheroni publicó la obra en verso dedicada a Napoleón Bonaparte *La geometria del compasso* donde demostró el siguiente teorema:

Todos los problemas de construcción que se resuelven con ayuda del compás y la regla, pueden resolverse con precisión empleando solo un compás

Lorenzo Mascheroni (1797)^[1]

Aunque Mascheroni demostró el teorema en 1797, en 1928 el matemático danés Guelmslev encontró en una tienda de libros de Copenhague el libro *Euclides danés* de Georg Mohr, publicado en Amsterdam en 1672, donde se solucionaba el mismo problema que Mascheroni.

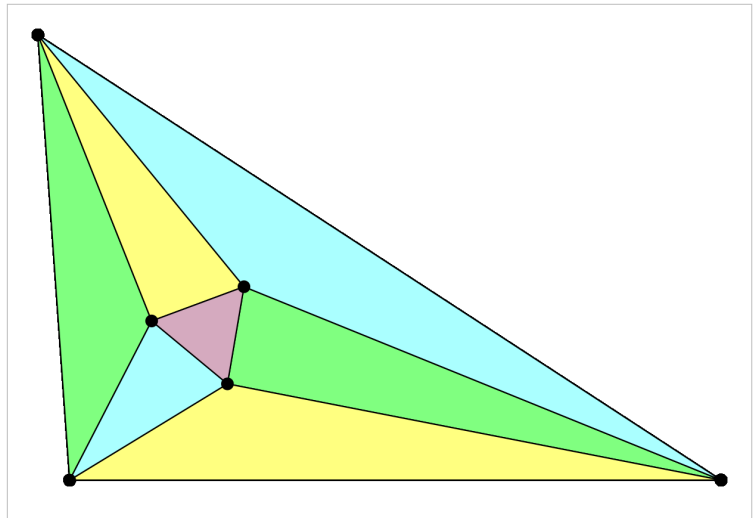
Referencias

Bibliografía

- Gardner, Martin. «Capítulo 17. Construcciones de Mascheroni». *Circo matemático* (Alianza Editorial, El libro de bolsillo 937 edición). ISBN 84-206-1937-X.

Teorema de Morley

En geometría plana, el **teorema de Morley** establece que, en un triángulo cualquiera, los tres puntos de intersección entre trisectrices de ángulos adyacentes forman un triángulo equilátero, denominado **triángulo de Morley**. El teorema fue descubierto en 1899 por el matemático angloestadounidense Frank Morley. Tiene varias generalizaciones, en particular, si se intersecan todas las trisectrices, se obtienen otros cuatro triángulos equiláteros.



Cabe notar que, como no se puede trisecar un ángulo sólo con regla y compás, no se puede construir el triángulo de Morley con dichas limitaciones. Además, el teorema de Morley no se cumple en las geometrías esférica e hiperbólica^[1]

Historia y demostraciones

El teorema fue descubierto en 1899 por Frank Morley, quien lo mencionó a sus amigos sin llegar a demostrarlo, es decir, lo dejó como conjetura. Ellos, a su vez, lo difundieron a modo de curiosidad matemática. Finalmente, tras diez años, se publicaron dos demostraciones, una trigonométrica de M. Satyanarayana y otra de geometría elemental de M. T. Naraniengar.^[2] Esta última sería redescubierta en 1922 por J. M. Child.^{[3][4]}

Actualmente existen muchas demostraciones matemáticas del teorema de Morley, algunas de las cuales son muy técnicas^[5] Entre las demostraciones existentes se encuentra la demostración geométrica de Raoul Bricard en 1922,^[6] la demostración algebraica de Alain Connes^{[7][8]} y la demostración geométrica de John Conway.^[9] Esta última demostración empieza con un triángulo equilátero y muestra que se puede construir en torno a él un triángulo semejante a cualquier triángulo dado.

Triángulos de Morley

El teorema de Morley conlleva un total de 18 triángulos equiláteros. El triángulo anteriormente descrito en la formulación del teorema, denominado **primer triángulo de Morley**, tiene sus tres vértices con las siguientes coordenadas trilineales respecto del triángulo original ABC :

$$\text{Vértice } A = 1 : 2 \cos(C/3) : 2 \cos(B/3)$$

$$\text{Vértice } B = 2 \cos(C/3) : 1 : 2 \cos(A/3)$$

$$\text{Vértice } C = 2 \cos(B/3) : 2 \cos(A/3) : 1$$

Otro de los triángulos de Morley que también es triángulo central se denomina **segundo triángulo de Morley** y viene dado por los siguientes vértices:

$$\text{Vértice } A = 1 : 2 \cos(C/3 - 2\pi/3) : 2 \cos(B/3 - 2\pi/3)$$

$$\text{Vértice } B = 2 \cos(C/3 - 2\pi/3) : 1 : 2 \cos(A/3 - 2\pi/3)$$

$$\text{Vértice } C = 2 \cos(B/3 - 2\pi/3) : 2 \cos(A/3 - 2\pi/3) : 1$$

El tercero de los 18 triángulos equiláteros de Morley que también es central se denomina **tercer triángulo de Morley**, y viene dado por los siguientes vértices:

$$\text{Vértice } A = 1 : 2 \cos(C/3 - 4\pi/3) : 2 \cos(B/3 - 4\pi/3)$$

$$\text{Vértice } B = 2 \cos(C/3 - 4\pi/3) : 1 : 2 \cos(A/3 - 4\pi/3)$$

$$\text{Vértice } C = 2 \cos(B/3 - 4\pi/3) : 2 \cos(A/3 - 4\pi/3) : 1$$

Los triángulos primero, segundo y tercero de Morley son homotéticos dos a dos. Otro triángulo homotético está formado por los tres puntos X en el circuncírculo del triángulo ABC en el que la recta XX^{-1} es tangente al circuncírculo, donde X^{-1} denota el conjugado isogonal de X . Este triángulo equilátero, denominado **triángulo circuntangencial**, tiene los siguientes vértices:

$$\text{Vértice } A = \csc(C/3 - B/3) : \csc(B/3 + 2C/3) : -\csc(C/3 + 2B/3)$$

$$\text{Vértice } B = -\csc(A/3 + 2C/3) : \csc(A/3 - C/3) : \csc(C/3 + 2A/3)$$

$$\text{Vértice } C = \csc(A/3 + 2B/3) : -\csc(B/3 + 2A/3) : \csc(B/3 - A/3)$$

Un quinto triángulo, también homotético a los demás, se obtiene al rotar el triángulo circuntangencial $\pi/6$ sobre su centro. Este triángulo, el **triángulo circunnormal**, tiene los siguientes vértices:

$$\text{Vértice } A = \sec(C/3 - B/3) : -\sec(B/3 + 2C/3) : -\sec(C/3 + 2B/3)$$

$$\text{Vértice } B = -\sec(A/3 + 2C/3) : \sec(A/3 - C/3) : -\sec(C/3 + 2A/3)$$

$$\text{Vértice } C = -\sec(A/3 + 2B/3) : -\sec(B/3 + 2A/3) : \sec(B/3 - A/3)$$

Centros de triángulos relacionados

El centroide del primer triángulo de Morley viene dado por

$$\text{Centro de Morley} = X(356) = \cos(A/3) + 2 \cos(B/3)\cos(C/3) : \cos(B/3) + 2 \cos(C/3)\cos(A/3) : \cos(C/3) + 2 \cos(A/3)\cos(B/3)$$

El primer triángulo de Morley es perspectivo al triángulo ABC , y el perspector es el punto

$$\text{Primer centro de Morley-Taylor-Marr} = X(357) = \sec(A/3) : \sec(B/3) : \sec(C/3)$$

Notas y referencias

- C. O. Oakley y J. C. Baker, "The Morley trisector theorem," *American Mathematical Monthly* 85 (1978) 737-745.
- F. Glanville Taylor y W. L. Marr, "The six trisectors of each of the angles of a triangle," *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* 33 (1913-14) 119-131.

[1] Morley's Theorem in Spherical Geometry (<http://lienhard-wimmer.com/applets/dreieck/Morley.html>), applet Java.

[2] H. S. M. Coxeter, «*Introduction to Geometry*», página 24

[3] J. M. Child, «*A Proof of Morley's Theorem*», *The Math. Gaz.* (1922), 171

[4] Juan M. Conde Calero, «*El teorema de Morley* (<http://www.oei.es/oim/revistaoim/numero14/TeoremadeMorley1.pdf>)» (PDF)

[5] Morley's Miracle (<http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml>)

[6] Richard K. Guy, «*The Lighthouse Theorem, Morley & Malfatti - A Budget of Paradoxes*» (<http://www.math.ucalgary.ca/files/publications/3414848.pdf>), *American Mathematical Monthly* 114 (2007) 97-141.

[7] Alain Connes, «*A new proof of Morley's theorem*» (http://www.numdam.org/numdam-bin/fitem?id=PMIHES_1998__S88__43_0), *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, S88 (1998), p. 43-46.

[8] Alain Connes, «*Symmetries*» (<http://www.ems-ph.org/journals/newsletter/pdf/2004-12-54.pdf>), *European Mathematical Society Newsletter* No. 54 (Dic. 2004).

[9] Demostración de Conway (<http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/conway.shtml>) (en inglés)

Enlaces externos

En inglés:

- Bogomolny, Alexander. «Morley's Miracle — Several proofs of Morley's theorem (<http://www.cut-the-knot.org/triangle/Morley/index.shtml>)» (en inglés). *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles* (<http://www.cut-the-knot.org/index.shtml>).
- Morley's Trisection Theorem (<http://www.mathpages.com/home/kmath376/kmath376.htm>) en MathPages
- Oleksandr Pavlyk. «Morley's Theorem (<http://demonstrations.wolfram.com/MorleysTheorem/>)» (en inglés). *The Wolfram Demonstrations Project*. Wolfram Research.
- Richard L. Francis, "Modern Mathematical Milestones: Morley's Mystery" (<http://www.math-cs.ucmo.edu/~mjms/2002.1/francis9.ps>), *Missouri Journal of Mathematical Sciences*, Volume 14:1 (2002), 3 pp.
- Weisstein, Eric W. «Morleys Theorem (<http://mathworld.wolfram.com/MorleysTheorem.html>)» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.

En español:

- «*El teorema de Morley*» (<http://gaussianos.com/el-teorema-de-morley/>) en el blog *Gaussianos*.

Teorema de Napoleón

En geometría, el **teorema de Napoleón** es un resultado sobre triángulos equiláteros; se le atribuye a Napoleón Bonaparte (1769–1821), si bien no hay pruebas tangibles de que sea el verdadero autor. Aparece publicado en el calendario *The Ladies' Diary* de 1825, es decir 4 años después su muerte.^[1]

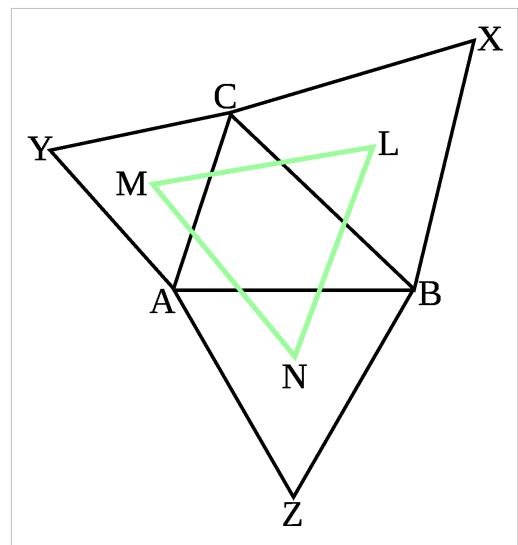
Enunciado

Teorema de Napoleón

Si se construyen tres triángulos equiláteros a partir de los lados de un triángulo cualquiera, todos al interior o todos al exterior, entonces los centros de los triángulos equiláteros forman también un triángulo equilátero.

Demostración

Por construcción, al efectuar sobre el triángulo MCL una rotación de 30° centrada en C , seguida de una homotecia de razón $\sqrt{3}$, los puntos M y L se transforman en A y X , por lo que el segmento AX es igual a raíz de tres veces el segmento ML . Dado que los triángulos YCB y ACX se obtienen uno a partir del otro por una rotación centrada en C de un ángulo de 60° , resulta que los segmentos AX y YB son iguales. Aplicando el mismo razonamiento a los triángulos MAN y NBL , esta vez tomando como centro de rotación los puntos A y B y las homotecias correspondientes, se establece que los segmentos AX , YB y CZ son iguales entre sí y que guardan la misma relación entre cada uno de sus lados con la longitud de los lados del triángulo MNL (raíz cuadrada de 3). Lo cual prueba que el triángulo MNL es equilátero.



Notas y referencias

- Napoleon's Theorem (http://www.cut-the-knot.org/proofs/napoleon_intro.shtml), A. Bogomolny, *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles*, fecha de acceso: diciembre 30, 2011.

Enlaces externos

- Demostración interactiva (<http://demonstrations.wolfram.com/NapoleonsTheorem/>), Jay Warendorff, *The Wolfram Demonstrations Project*.

Teorema de Ptolomeo

El **teorema de Ptolomeo** es una relación en geometría euclidiana entre los cuatro lados y las dos diagonales de un cuadrilátero cíclico. El teorema recibe su nombre del astrónomo y matemático griego Claudio Ptolomeo.

Si un cuadrilátero está dado por sus cuatro vértices **A**, **B**, **C**, **D**, el teorema afirma que:

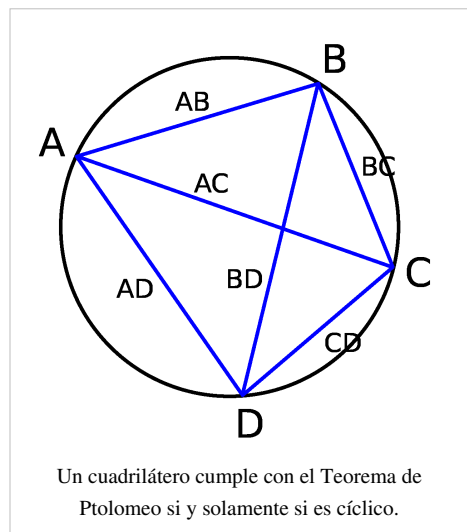
$$\overline{AC} \cdot \overline{BD} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD}$$

Donde la línea sobre las Letras indica la longitud de los segmentos entre los vértices correspondientes.

Esta relación puede ser expresada de manera verbal de la siguiente forma:

Teorema de Ptolomeo

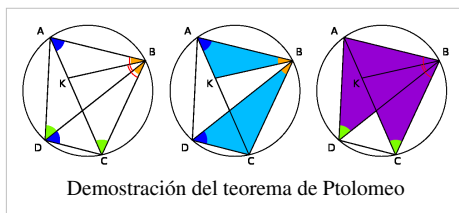
En todo cuadrilátero inscribible en una circunferencia, la suma de los productos de los pares de lados opuestos es igual al producto de sus diagonales.



Claudio Ptolomeo

Demostraciones

Demostración geométrica



1. Sea ABCD un cuadrilátero cíclico.
2. Note que en el segmento BC, ángulos inscritos $\angle BAC = \angle BDC$, y en AB, $\angle ADB = \angle ACB$.
3. Ahora, por ángulos comunes $\triangle ABK$ es semejante a $\triangle DBC$, y $\triangle ABD \sim \triangle KBC$
4. Por lo tanto $AK/AB = CD/BD$, y $CK/BC = DA/BD$,
 1. Por lo tanto $AK \cdot BD = AB \cdot CD$, y $CK \cdot BD = BC \cdot DA$;
 2. Lo que implica $AK \cdot BD + CK \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$
 3. Es decir, $(AK+CK) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$;
 4. Pero $AK+CK = AC$, por lo tanto $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$; como se quería demostrar.

Note que la demostración es válida sólo para cuadriláteros concíclicos simples. Si el cuadrilátero es complejo entonces K se encontrará fuera del segmento AC , y por lo tanto $AK-CK=\pm AC$, tal como se esperaba.

Existe una generalización de este teorema llamado el teorema de Casey, que involucra a cuatro circunferencias no secantes y tangentes interiores a una quinta.

El teorema de Ptolomeo se puede demostrar con métodos de inversión geométrica con respecto a cualquier vértice de un cuadrilátero.^[1]

Ejemplo

Considérese un pentágono regular y la circunferencia circunscrita al mismo. En el cuadrilátero $ABCD$ las diagonales son iguales al lado AD . El teorema de Ptolomeo arroja en este caso,

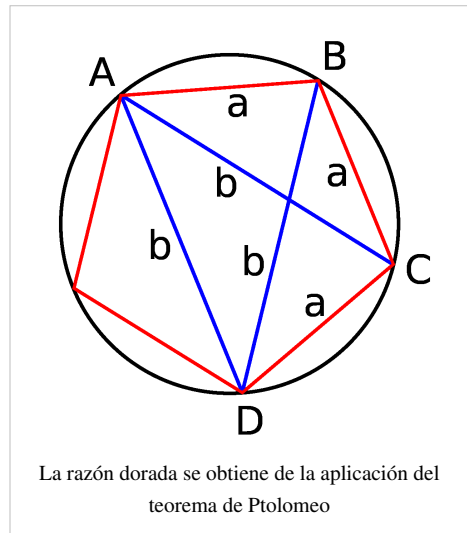
$$b^2 = ab + a^2.$$

Dividiendo entre a^2 se tiene

$$\frac{b^2}{a^2} = 1 + \frac{b}{a}.$$

Denotando con φ la razón b/a se obtiene $\varphi^2 = 1 + \varphi$, ecuación que coincide con la definición de la razón dorada.

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$



Referencias

[1] Adam Puig *Curso de Geometría Métrica, Tomo 1* ISBN 84-85731-03-4.

Enlaces externos

- Teorema de Ptolomeo (<http://planetmath.org/encyclopedia/PtolemysTheorem.html>) en PlanetMath
- Weisstein, Eric W. «Desigualdad de Ptolomeo (<http://mathworld.wolfram.com/PtolemyInequality.html>)» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.

Teorema de Poncelet–Steiner

En geometría, el **teorema de Poncelet–Steiner** establece que todas las construcciones geométricas que pueden realizarse con regla y compás pueden realizarse únicamente con regla conocido un único círculo y su centro. Por tanto, todas las construcciones que pueden realizarse con regla y compás puede realizarse con regla utilizando una única vez el compás.

El resultado, ya conjeturado por Jean-Victor Poncelet en 1822, fue demostrado por primera vez por el matemático suizo Jakob Steiner en su obra de 1833 «*Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises*».^[1]

Referencias

[1] Die geometrischen Constructionen ausgeführt mittels der geraden Linie und eines festen Kreises (1833): Construcciones geométricas mediante línea recta y círculo.

Bibliografía

- Kostovski, A. N.. *Construcciones geométricas mediante un compás*. Editorial MIR.

Método exhaustivo

El **método exhaustivo**^[1] es un procedimiento geométrico-matemático de aproximación a un resultado, con el cual el grado de precisión aumenta en la medida en que avanza el cálculo.

También se lo conoce como:

- **método por agotamiento**,^[2]
- **método de exhaustión**^[3] o
- **método de exhaustión**.^[4]

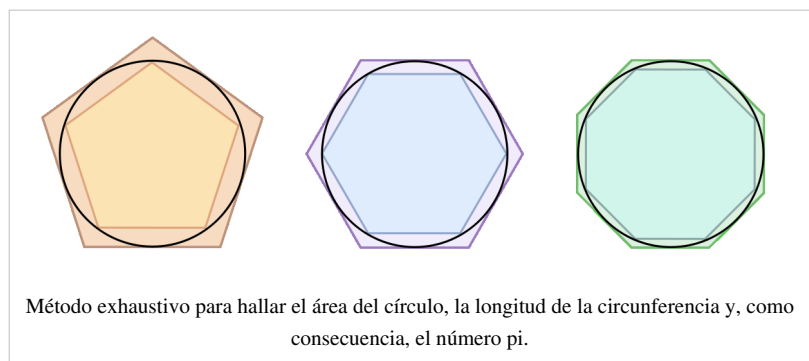
El término proviene del inglés *method of exhaustion* (que sería mejor traducido como ‘método por agotamiento’, ya que la Real Academia Española no ha aceptado aún el sustantivo «exhaustión», a pesar de reconocer el adjetivo «exhausto»). El inglés *exhaustion* proviene del latín *exhaustiō* (‘agotamiento’).

Historia

El sofista Antifonte (430 a. C.) trató de determinar el área del círculo inscribiendo en él un mayor número de triángulos, cada vez más pequeños, hasta que su área se colmara.

Un ejemplo más famoso del método exhaustivo o por agotamiento es el del cálculo de la longitud de una circunferencia efectuado por Arquímedes. Él utilizó dos métodos:

- el método de agotamiento, inscribiendo polígonos regulares en una circunferencia de radio unitario, y
- el método de compresión, circunscribiendo polígonos a la circunferencia. De este modo, al aumentar el número de lados de los polígonos, las figuras tenderán a acercarse a la forma de la circunferencia, tanto que Arquímedes



pudo obtener una medida bastante precisa del número π .

El método de agotamiento está descrito en el *Método*, un libro de Arquímedes en el que se explica este procedimiento. Es la base de los conceptos que en el siglo XVII permitieron a Isaac Newton y a Leibniz unificar el cálculo diferencial con el integral, lo cual conllevó la posterior definición rigurosa de límite de una función por Bernard Bolzano, Cauchy y Weierstrass.

El método de agotamiento es el precursor del concepto de Suma de Riemann que permite definir con rigor la integral de una función en un intervalo.

Notas

- [1] Alberto Rodríguez de Rivera Meneses: «Arquímedes. El genio de Siracusa», ([http://scholar.googleusercontent.com/scholar?q=cache:Ew4NWPPAWV0J:scholar.google.com/+mÃ©todo+exhaustivo"+arquimedes&hl=es&as_sdt=0,5](http://scholar.googleusercontent.com/scholar?q=cache:Ew4NWPPAWV0J:scholar.google.com/+mÃ©todo+exhaustivo)) artículo en *Historia de las Matemáticas*, en el sitio web de la Universidad Autónoma de Madrid.
- [2] Charla mantenida por el Dr. Ing. Carlos P. Filipich en la Academia de Ingeniería de la Provincia de Buenos Aires con motivo de su incorporación como académico correspondiente, (http://www.acaingpba.org.ar/CHARLA_Filipich.pdf) artículo del 18 de mayo de 2011 en el sitio web de la AcaIngPBA.
«De Eudoxio destacamos dos líneas que serán básicas para la tarea de Arquímedes: las proporciones geométricas y el **método exhaustivo** o por agotamiento».
- [3] Ángel Ruiz Zúñiga: *Elementos de cálculo diferencial; el método de exhaustión* (<http://books.google.es/books?id=ptBhjsVvwioC>) (pág. 21). San José de Costa Rica: Editorial Universidad de Costa Rica, 1997.
- [4] «El método de exhaustión en Descartes», (http://descartes.cnice.mec.es/materiales_didacticos/La_integral_definida_y_la_funcion_area/exhauca.htm) artículo del 2 de marzo de 2009.

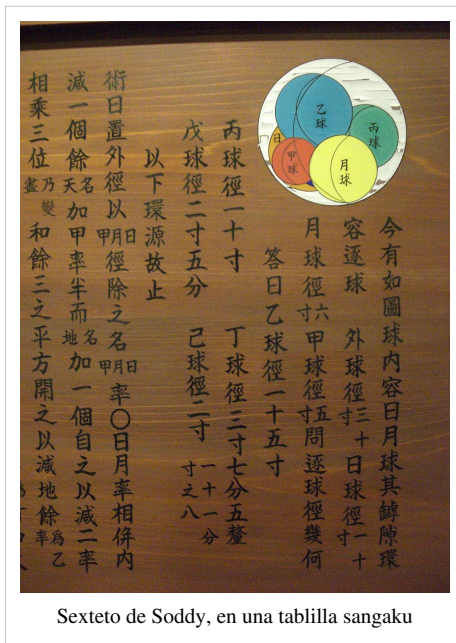
Sangaku

Sangaku o **San Gaku** (算額 *lit. Tablilla Matemática*[?]) son tablillas de origen japonés con problemas matemáticos principalmente geométricos, creadas durante el período Edo.

Un *sangaku* es una tablilla de madera con figuras geométricas, ubicadas en los templos y santuarios como ofrendas votivas a los dioses o como desafíos a los congregados y visitantes, escritos en kanbun, una forma antigua de japonés. Cada tablilla sangaku contiene entre 1 y 10 problemas, y cada problema está formado de la siguiente manera: arriba (o a la derecha) de la tablilla se ubican las figuras geométricas; abajo (o a la izquierda) se encuentran la pregunta y soluciones (procedimiento, respuesta, o ambas si las hay); y por último el creador del sangaku, el profesor, la escuela y la fecha de su colgado.



Sangaku



Historia

Los *sangaku* provienen de la costumbre nipona de colgar tablillas en los templos, originada por el sintoísmo (del japonés **Shinto** (神道 *shintō*?). El *sintoísmo* o *shintōísmo* afirma la existencia de divinidades o seres espirituales (Kami (神?)) que pueden encontrarse en la naturaleza o en niveles superiores de existencia. Este término, que constituye el concepto central del culto, se aplica a cualquier fuerza sobrenatural o dios, como los dioses de la naturaleza, hombres sobresalientes, antepasados deificados o hasta deidades que representan ciertos ideales o simbolizan un poder abstracto. Se trata de vivir en armonía con los kami, y así poder disfrutar de su protección y aprobación. Y dado que a los kami les encantan los caballos vivos, los fieles que no podían ofrendar un caballo, tenían la opción de ofrecer un remado en madera. Es por esto que muchas tablillas que datan del siglo XV o antes, contienen representaciones de caballos.^[1]



El periodo Edo fue un periodo de paz, el cual duro cerca de dos siglos y medio. Antes de ese momento el país había sido devastado por una serie de guerras internas provocadas por los distintos clanes rivales que querían llegar al poder. Hasta que finalmente el orden fue restablecido por el shogun que es la máxima autoridad después del emperador, tokugawa Ieyasu, llevo a cabo la reunificación del país tanto política como económica, fue así como la capital fue trasladada de Kioto a Edo, desde ese momento Japón llevó un aislamiento voluntario con respecto al resto del mundo, y todo aquel que se atreviese a desobedecer esto, era condenado a muerte, fue así como que en 1854 el gobierno fue derrocado por la fuerza naval norteamericana. Este periodo de aislamiento también produjo que las matemáticas avanzaran mucho en Japón ya que no tenían acceso al resto del mundo, fueron las mismas personas tanto campesinos como samuráis quienes dieron un desarrollo genuino a este periodo.

Muchas de estas tablillas se perdieron durante el período de modernización que siguió al período Edo, de las 2625 tablillas que se supone existieron, 884 se conservan.^[2] La tablilla Sangaku más antigua que se conoce proviene de la prefectura de Tochigi y se remonta a 1683. Aunque el diario del matemático japonés Kazu Yamagushi (1781-1850) se alude a una tablilla del año 1668, perdida en la actualidad.^[1]

Fujita Kagen (1765-1821), matemático japonés, publicó la primera colección de problemas Sangaku, en sus obras *Shinpeki Sanpō* (Problemas matemáticos suspendidos en el Templo) en 1789, y una segunda parte en 1806, *Zoku Shinpeki Sanpō*. Una colección de Sangaku fue publicada en 1989 por Hidetoshi Fukagawa y Daniel Pedoe, la primera en inglés, en el libro: *Japanese Temple Geometry Problems*.

Aspectos matemáticos

Sobre los temas en los que se enfocan los Sangaku, son principalmente la geometría euclidiana y específicamente sobre círculos, elipses, esferas, cuadrados, rectángulos, cilindros, triángulos, conos, cubos, figuras dentro de otras figuras, como también el cálculo de volumen de diversos sólidos, requiriendo de cálculo integral. Sobre temas algebraicos se encuentran los sistemas de ecuaciones, interés simple-compuesto, ecuaciones diofánticas simples.^[3]

Gran parte de los problemas entrarían en la categoría de matemática recreativa, pero algunos usan versiones japonesas de algunos teoremas como el teorema de los círculos de Descartes, mientras otros se adelantan a famosos resultados occidentales como el teorema de Malfatti, el teorema de Casey o el sexteto de Soddy.^[4]

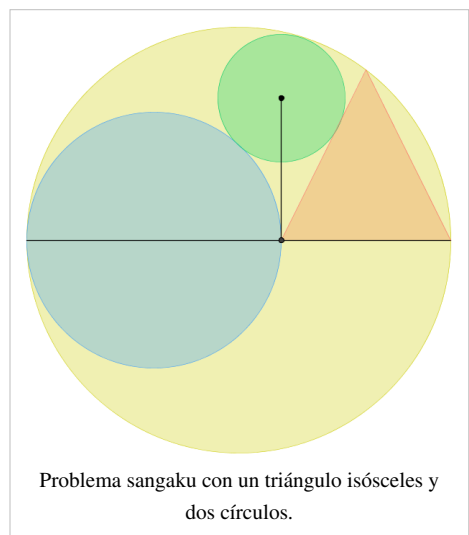
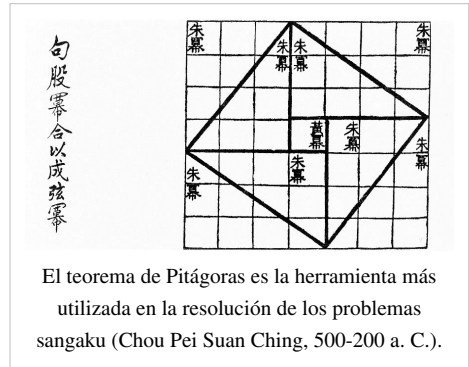
Algunos de los problemas son sencillos y solo se requiere de conocimientos de secundaria como el teorema de Pitágoras y semejanza de triángulos, mientras otros requieren de matemáticas superiores para ser abordados como el enri (cálculo integral japonés) y derivadas

Problemas sangaku

Un círculo que contiene a dos círculos, un triángulo isósceles y una perpendicular

En este problema de la Prefectura de Gunma de 1803, la base del triángulo isósceles descansa sobre el diámetro de la circunferencia mayor. El centro de la circunferencia azul se encuentra en el diámetro de la circunferencia verde y la circunferencia es tangente interior a la circunferencia verde. La circunferencia roja es tangente exterior del triángulo y de la circunferencia verde, e interior de la circunferencia verde. Hay que demostrar que el segmento que conecta el centro de la circunferencia roja con el punto de intersección del triángulo y la circunferencia azul es perpendicular con el diámetro de la circunferencia verde.

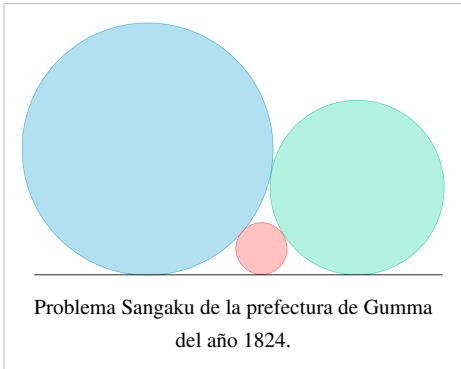
En la solución dada en el sangaku, el autor traza un segundo segmento rectilíneo distinto del segmento enunciado que pasa por el centro del círculo rojo y que es perpendicular al diámetro del círculo verde, de modo que los dos segmentos deberían interceptar al diámetro en puntos distintos. Luego, se demuestra que la distancia entre estas dos distancias tiene que ser necesariamente cero lo que supone que estos segmentos son idénticos, demostrando la perpendicularidad.



Tres circunferencias tangentes entre sí y a una recta

Este problema de la Prefectura de Gunma del año 1824, trata sobre tres circunferencias tangentes entre sí y a una misma recta. Se pide determinar el radio de la circunferencia más pequeña en términos de las dos circunferencias restantes. La solución a este problema es:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1}} = \frac{1}{\sqrt{r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_3}}$$



ó

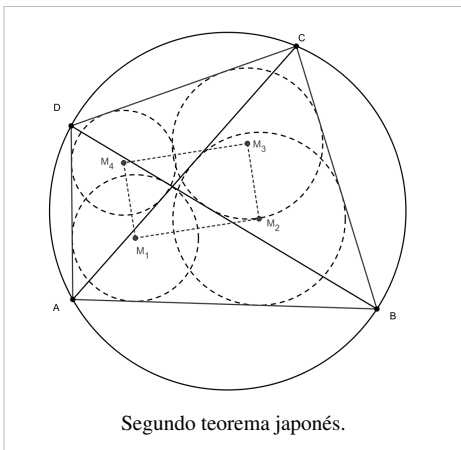
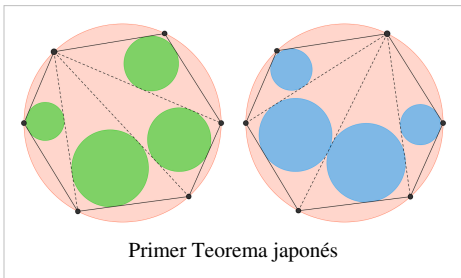
$$r_1 = \frac{r_2 r_3}{(\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3})^2}$$

donde r_1, r_2, r_3 son respectivamente el radio de la circunferencia **rojo**, **verde** y **azul**. Este problema es un caso especial del teorema de los círculos de Descartes cuando la cuarta circunferencia tiene curvatura cero. Puede resolverse aplicando el teorema de Pitágoras.

Primer Teorema de Mikami-Kobayashi

También llamado *Primer Teorema japonés*, este teorema nos dice que al triangular un polígono convexo inscrito en un círculo, trazando todas las diagonales desde uno de los vértices, la suma de los radios de los círculos inscritos en los triángulos es una constante (invariante) que es independiente del vértice elegido para hacer la triangulación.

En la imagen se muestran dos triangulaciones de un hexágono incrito, formando las circunferencias verdes y azules respectivamente. Por el primer teorema japonés:



$$\text{La suma de los radios de las circunferencias verdes} = \text{suma de los radios de las circunferencias azules}$$

La idea básica de la prueba es utilizar el teorema de Carnot en cada triángulo inscrito en el polígono.

Segundo teorema de Mikami-Kobayashi

También llamado *Segundo teorema japonés*, este teorema nos dice que al unir los incentros de los triángulos formados al trazar las diagonales de un cuadrilátero inscrito en una circunferencia se forma un rectángulo.

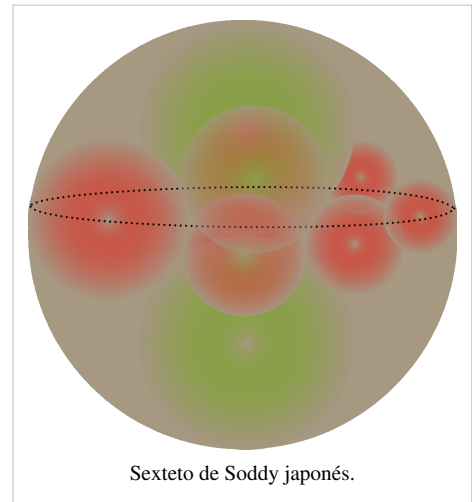
Sea $\square ABCD$ un cuadrilátero y M_1, M_2, M_3, M_4 los incentros de los triángulos $\triangle ABD, \triangle ABC, \triangle BCD, \triangle ACD$. Entonces el cuadrilátero formado por M_1, M_2, M_3, M_4 es un rectángulo.

La idea básica de la demostración es probar que los ángulos del cuadrilátero formado por los incentros son rectos y por lo tanto es un rectángulo.

Sexteto de Soddy

Este problema de la prefectura de Kanagawa de 1822 colgado en el santuario de Kōzagan por Yazawa Hiroatsu, se anticipa en más de cien años al trabajo de Frederick Soddy. Dos esferas tangentes A y B entre sí están inscritas en una gran esfera C. El problema es determinar el número de esferas que forman el collar, o sea, esferas de distintos tamaños tangentes a sus dos vecinos más cercanos y a las tres esferas dadas, además se pide encontrar los radios de las esferas que forman el collar en función de los radios de A, B y C.

La solución viene dada por el teorema del sexteto de Soddy (1937) que nos dice que habrá sólo 6 esferas. La solución usando wasan del manuscrito *Sanpō Tenzan Tebikigusa* (1841) de Ōmura Kazuhide (1824–1891), aplica la versión japonesa del teorema de los círculos de Descartes como idea básica y la extiende al mundo de las esferas.



Sexteto de Soddy japonés.

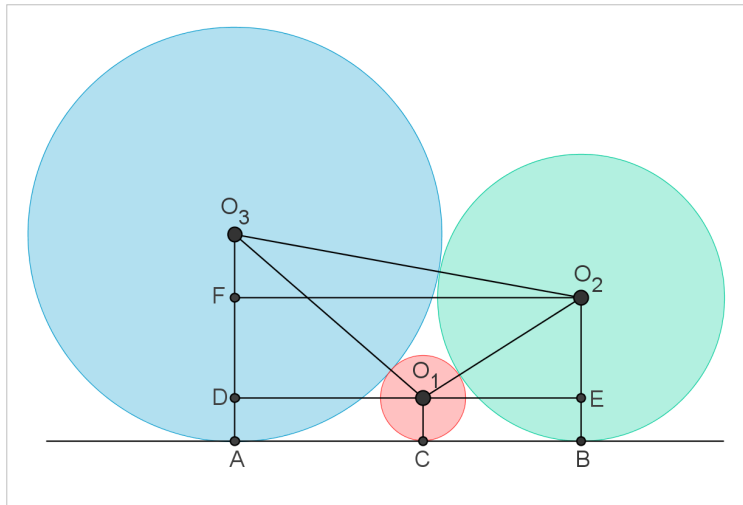
Sangakus algebraicos

Entre los sangakus algebraicos destacamos:

- El problema de la tablilla de Ufa Chusaburō de 1743: Se tienen 50 pollos y conejos. Si el número de patas es 122, ¿Cuántos pollos y conejos hay?.
- De la tablilla del templo Shōganji, prefectura de Nagano: Se divide un capital de 60 en forma igualitaria para repartir a varios hombres como préstamo a interés compuesto por más de 3 años, después del cual el capital de vuelta con interés añadido será 105.12. La diferencia de la tasa de interés anual entre cada deudor es de 10% y la suma de la tasa de interés anual es de 60%. Encontrar el número de hombres a los cuales se les ha dado el préstamo.
- Del santuario Hioki-jinja: Se tienen dos cubos, A (el más grande) y B. La suma de los volúmenes de A y B es 2240 sun (80499 cm^3) y la diferencia entre los lados de A y B es 4 sun (13.2 cm). Encontrar la longitud del lado de B.

Algunas soluciones

Tres circunferencias tangentes entre sí y a una recta



Sea $O_2O_3 = r_2 + r_3$,

$O_1O_2 = r_1 + r_2$ y

$O_1O_3 = r_1 + r_3$, segmentos que conectan los centros de las circunferencias.

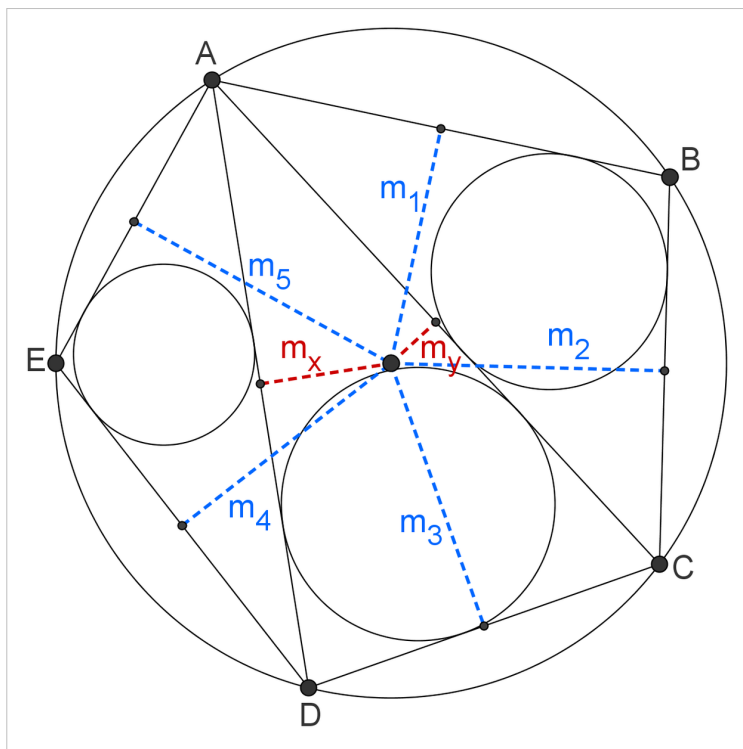
Luego, por Teorema de Pitágoras :

$$AB = FO_2 = \sqrt{(O_2O_3)^2 - (O_3F)^2} = \sqrt{(r_2 + r_3)^2 - (r_3 - r_2)^2} = 2\sqrt{r_2r_3},$$

de forma análoga para los segmentos $AC = DO_1 = 2\sqrt{r_1r_3}$ y $CB = EO_1 = 2\sqrt{r_2r_1}$.

Como $AB = AC + CB$, tenemos que: $2\sqrt{r_2r_3} = 2\sqrt{r_1r_3} + 2\sqrt{r_1r_2}$ dividiendo por $2\sqrt{r_1r_2r_3}$ a ambos lados de la ecuación se llega a la solución.

Primer Teorema de Mikami-Kobayachi



Consideremos la triangulación de un 5-polígono convexo inscrito en una circunferencia de radio R . Sean m_1, \dots, m_5 los segmentos de mediatrices (o simetrales) desde el circuncentro a los lados. Sean r_1, r_2 y r_3 los radios de las circunferencias inscritas en los triángulos $\triangle ABC$, $\triangle ACD$ y $\triangle ADE$ respectivamente. Aplicando el teorema de Carnot a estos triángulos obtenemos:

$$m_1 + m_2 - m_y = R + r_1$$

$$m_3 + m_x + m_y = R + r_2$$

$$m_4 + m_5 - m_x = R + r_3$$

Sumando miembro a miembro, conmutando y despejando los radios obtenemos:

$$r_1 + r_2 + r_3 = (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) - 3R$$


El miembro derecho de la igualdad no depende de la triangulación que hemos utilizado. De forma análoga se puede probar para cualquier k -polígono convexo.

Referencias

Libros

- Fukagawa, Hidetoshi ; Pedoe, Daniel (1989) Japanese Temple Geometry Problems: Sangaku. Charles Babbage Research Centre. ISBN 0-919611-21-4.
- Fukagawa, Hidetoshi ; Rothman, Tonny (2008) Sacred Mathematics: Japanese Temple Geometry. Princeton University Press, Princeton. ISBN 0-691-12745-X.
- Huvent, Géry (2008) *Sangaku. Le mystère des énigmes géométriques japonaises*, Dunod. ISBN 2-10-052030-X

Enlaces externos

-  Wikimedia Commons alberga contenido multimedia sobre **Sangaku**. Commons

Problemas sangaku

- García Capitán, F. J. (2003) Problemas sangaku (<http://garciacapitan.99on.com/problemas/sangaku1/libro.pdf>)
- Miranda, Ubaldo(2003). Gacetilla Matemática: Apuntes y notas sobre problemas sangakus (<http://www.arrakis.es/~mcj/sangaku.htm>)
- Parra, C.(2005) TÍPICOS PROBLEMAS SANGAKUS (http://es.geocities.com/parrita62_1/olimpiada/glosario.htm).
- Martín, M.(2008) Sangakus (http://atlas.mat.ub.es/personals/burgos/Geometria_Elemental/Magdalena/index.htm).
- Gutiérrez, Antonio(2007). Geometry step-by-step: Sangaku Japanese Geometrical problem: The incenters of four triangles in a cyclic quadrilateral - Antonio Gutiérrez (<http://agutie.homestead.com/files/sangaku2.html>). Una demostración interactiva sobre un problema Sangaku.

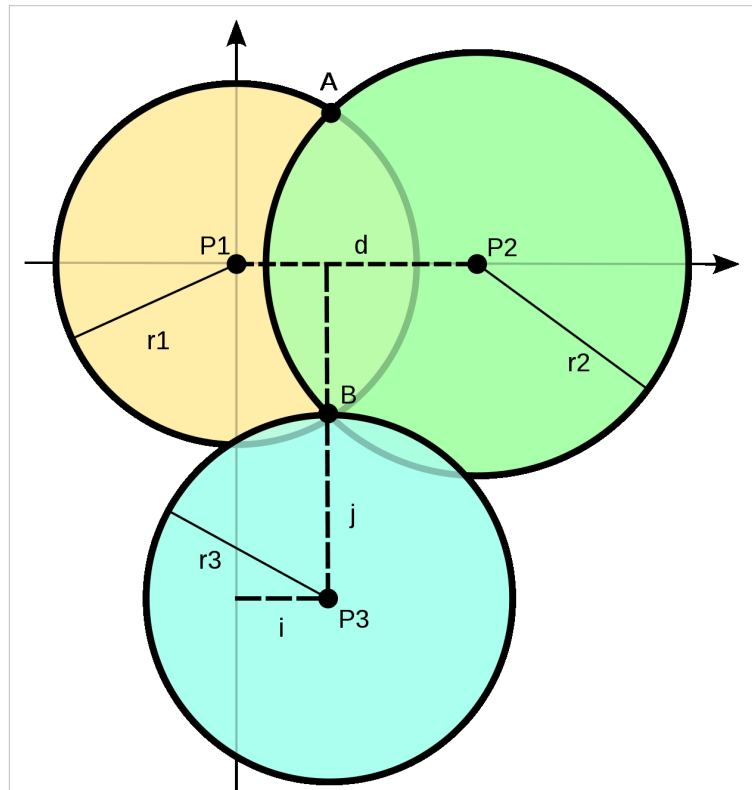
Otros sitios

- Aprendiendo Geometría a través de Sangaku (http://www.encuentrogeometria.org/dmdocuments/encuentro_17/25.Geometria_Sangaku.pdf)
- Delerue, Nicolas. Sangaku (Japanese votive tablets featuring mathematical puzzles) (<http://www.sangaku.info/>)
- Wasan.jp. ようこそ算額のホームページへ (<http://www.wasan.jp/index.html>) Catalogo de Sangaku, según prefectura de origen.
- Bogomolny, Alexander. «Sangaku: Reflections on the Phenomenon» (<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Sangaku.shtml>)» (en inglés). *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles* (<http://www.cut-the-knot.org/index.shtml>).

- Huvent, Géry <http://pagesperso-orange.fr/gery.huvent/html/sangaku.htm>

Trilateración

La **trilateración** es un método matemático para determinar las posiciones relativas de objetos usando la geometría de triángulos de forma análoga a la triangulación. A diferencia de ésta, que usa medidas de ángulo (junto con al menos una distancia conocida para calcular la localización del sujeto), la trilateración usa las localizaciones conocidas de dos o más puntos de referencia, y la distancia medida entre el sujeto y cada punto de referencia. Para determinar de forma única y precisa la localización relativa de un punto en un plano bidimensional usando sólo trilateración, se necesitan generalmente al menos 3 puntos de referencia.



Estando en **B**, queremos conocer su posición relativa a los puntos de referencia **P1**, **P2**, y **P3** en un plano bidimensional. Al medir r_1 se reduce nuestra posición a una circunferencia. A continuación, midiendo r_2 , la reducimos a dos puntos, **A** y **B**. Una tercera medición, r_3 , nos devuelve nuestras coordenadas en **B**. Una cuarta medición también puede hacerse para reducir y estimar el error.

Derivación

Puede hallarse una derivación de la solución de un problema de trilateración tridimensional tomando las fórmulas de tres esferas e igualándolas. Para hacer esto, debemos aplicar tres limitaciones a los centros de estas esferas; todas deben estar en el plano $z=0$, otra debe estar en el origen, y una tercera en el eje x . Es posible, sin embargo, trasladar cualquier conjunto de tres puntos para cumplir con estos límites, encontrar el punto solución, y luego invertir la traslación para encontrar el punto solución en el sistema de coordenadas original.

Empezamos con tres esferas,

$$r_1^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$r_2^2 = (x - d)^2 + y^2 + z^2,$$

y

$$r_3^2 = (x - i)^2 + (y - j)^2 + z^2,$$

Restamos la segunda a la primera y resolvemos para x :

$$x = \frac{r_1^2 - r_2^2 + d^2}{2d}.$$

Al sustituir esto en la fórmula de la primera esfera se produce la fórmula de un círculo, la solución a la intersección de las dos primeras esferas:

$$y^2 + z^2 = r_1^2 - \frac{(r_1^2 - r_2^2 + d^2)^2}{4d^2}.$$

Igualando esta fórmula a la fórmula de la tercera esfera, tenemos:

$$y = \frac{r_1^2 - r_3^2 - x^2 + (x - i)^2 + j^2}{2j} = \frac{r_1^2 - r_3^2 + i^2 + j^2}{2j} - \frac{i}{j}x.$$

Ahora que tenemos las coordenadas x e y del punto solución, podemos simplemente despejar z de la fórmula de la primera esfera:

$$z = \sqrt{r_1^2 - x^2 - y^2}$$

Ahora tenemos la solución para los tres puntos x , y y z . Ya que z se expresa en forma de raíz cuadrada, es posible que el problema tenga por solución cero, uno o dos resultados.

Esta última parte puede visualizarse como tomar el círculo formado por la intersección de la primera y segunda esferas y creando luego su intersección con la tercera. Si ese círculo queda totalmente fuera de la esfera, z es igual a la raíz cuadrada de un número negativo: no existe una solución real. Si ese círculo toca la esfera en exactamente un punto, z es igual a cero. Si, por último, el círculo toca la superficie de la esfera en dos puntos, entonces z es igual a más menos la raíz cuadrada de un número positivo.

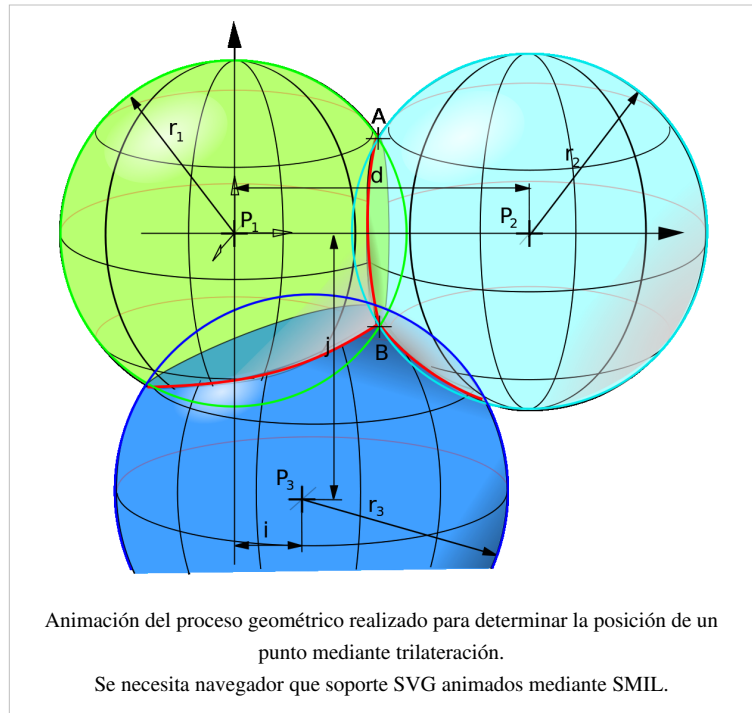
En el caso de no haber solución, no poco probable cuando los datos presentan ruido, la solución más aproximada es cero. Uno debe ser cuidadoso, no obstante, de hacer una prueba de control (*sanity check* en inglés) y asumir el valor de cero sólo cuando el error es apropiadamente pequeño.

En el caso de dos soluciones, pueden usarse algunas técnicas para desambiguar entre las dos. Esto puede hacerse matemáticamente, mediante el uso de una cuarta esfera con su centro localizado fuera del plano formado por los centros de las otras tres, y determinando qué punto cae más cercano a la superficie de esta esfera. O puede hacerse lógicamente —por ejemplo, el GPS asume que el punto que cae dentro de la órbita de los satélites es el correcto cuando se enfrenta a esta ambigüedad, ya que es generalmente seguro asumir que el usuario no está nunca en el espacio, fuera de las órbitas de los satélites.

Modelo de error

Cuando el error de medida se introduce en el dibujo, las cosas se complican un poco. Si sabemos que la distancia desde P a un punto de referencia cae en un rango (un intervalo cerrado) $[r_1, r_2]$, entonces sabemos que P cae en una banda circular entre los círculos con esos dos radios. Si conocemos un rango para otro punto, podemos tomar la intersección, que constituirá una o dos áreas delimitadas por arcos circulares. Un tercer punto normalmente la estrechará a una sola área, pero esta área puede ser aún de tamaño significativo; puntos de referencia adicionales pueden ayudar a disminuirla aún más, pero a medida que ésta disminuye más medidas perderán utilidad. En tres dimensiones, estamos en su lugar interseccionando *shells* esféricas con grosor, similares a bolas de jugar a los bolos.

Este nuevo modelo enfatiza la importancia de elegir tres puntos que estén en direcciones muy diferentes —si los puntos están relativamente cerca unos de otros y a su vez lejos del punto a localizar, se requerirán medidas muy



precisas para encontrar el punto usando trilateración.

Aplicación

La trilateración puede usarse en la detección del lugar de caída de un rayo. Los detectores que operan en un sistema de sincronización común pueden usar la variación del tiempo de llegada de las emisiones de radiofrecuencia que acompañan al rayo para determinar las distancias desde cada detector al mismo. Tales sistemas pueden ser útiles en silvicultura para la prevención de incendios y en el seguimiento de tormentas.

Pero su empleo más habitual es el proceso de determinación de la posición empleado por el sistema GPS.

Enlaces externos

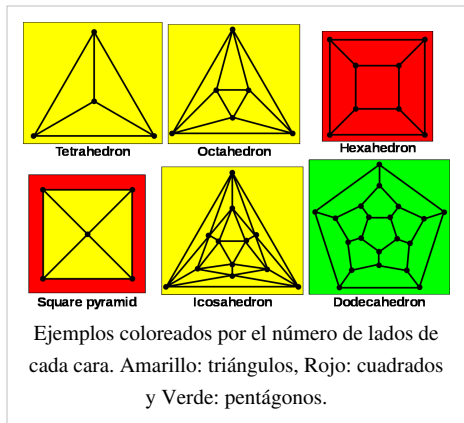
- M. Farjas. Triangulación y trilateración. Universidad Politécnica de Madrid. ^[1]
- Triangulation and Trilateration. High School Honors Institute, Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Colorado. ^[2]
- Artículo "Trilateration" en la Enciclopedia Britannica. ^[3]

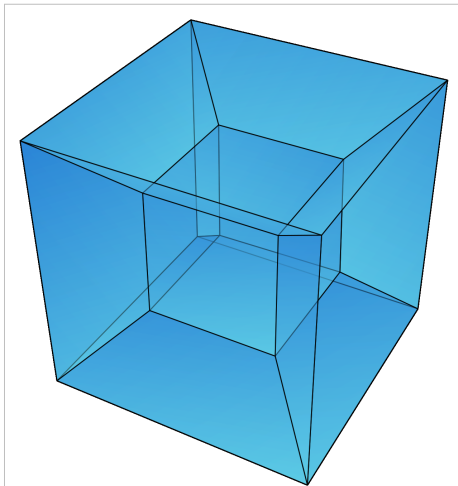
Referencias

- [1] http://209.85.229.132/search?q=cache:u0j4IJJrGwJ:ocw.upm.es/ingenieria-cartografica-geodesica-y-fotogrametria/topografia-ii/contenidos/Mis%2520documentos/Tema%25209%2520Triangulacion%2520y%2520Trilateracion/Teoria_Triang_Tema_9.pdf
- [2] <http://amath.colorado.edu/outreach/demos/hshi/2000Sum/TaT.html>
- [3] <http://www.britannica.com/EBchecked/topic/605329/trilateration>

Diagrama de Schlegel

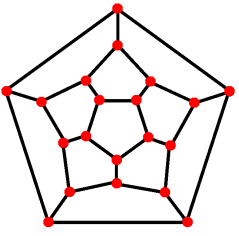
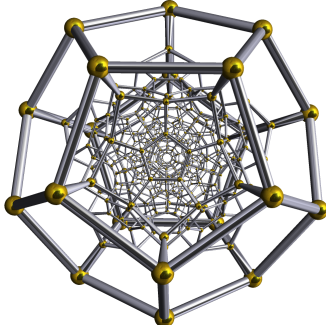
En geometría, un **diagrama de Schlegel** es una proyección de un politopo contenido en \mathbb{R}^d sobre el espacio \mathbb{R}^{d-1} a través de un punto que está más allá de una de sus "caras". La entidad resultante es una división politópica de las caras en \mathbb{R}^{d-1} que es combinatoriamente equivalente al politopo original. En 1886 Victor Schlegel introdujo esta herramienta para estudiar propiedades combinatorias y topológicas de los politopos. En dimensiones, 3 y 4, un diagrama de Schlegel es una proyección de un poliedro sobre el plano dando una figura plana y una proyección de un polícoro al espacio tridimensional, respectivamente. Como tal, los diagramas de Schlegel se usan frecuentemente para visualizar politopos del espacio de cuatro dimensiones.





Un tesseracto proyectado en el espacio tridimensional como diagrama de Schlegel. Existen 8 celdas cúbicas visibles, uno en el centro, uno sobre cada una de las seis caras exteriores del mismo, y un último cubo que representa el "interior" representando el espacio fuera de la frontera cúbica.

Ejemplos

Dodecaedro	Dodecaplex
 <p data-bbox="391 1361 678 1388">12 caras pentagonales en el plano</p>	 <p data-bbox="734 1462 1204 1489">120 celdas dodecahédricas en el espacio tridimensional</p>

Referencias

- Victor Schlegel (1883) *Theorie der homogen zusammengesetzten Raumgebilde*, Nova Acta, Ksl. Leop.-Carol. Deutsche Akademie der Naturforscher, Band XLIV, Nr. 4, Druck von E. Blochmann & Sohn in Dresden. [1]
- Victor Schlegel (1886) *Ueber Projektionsmodelle der regelmässigen vier-dimensionalen Körper*, Waren.
- Coxeter, H.S.M.; *Regular Polytopes*, (Methuen and Co., 1948). (p. 242)
 - *Regular Polytopes*, (3rd edition, 1973), Dover edition, ISBN 0-486-61480-8
- Grünbaum, Branko (2003), Kaibel, Volker; Klee, Victor; Ziegler, Günter M., eds., *Convex polytopes* (2nd edición), New York & London: Springer-Verlag, ISBN 0-387-00424-6.

Enalcelex exteriores

- Weisstein, Eric W. «Schlegel graph ^[2]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.
 - Weisstein, Eric W. «Skeleton ^[3]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.
- George W. Hart: 4D Polytope Projection Models by 3D Printing ^[4]
- Nrich maths – para estudiantes de secundaria. También útil para profesores. ^[5]

Referencias

- [1] <http://www.citr.auckland.ac.nz/dgt/Publications.php?id=544>
 [2] <http://mathworld.wolfram.com/SchlegelGraph.html>
 [3] <http://mathworld.wolfram.com/Skeleton.html>
 [4] <http://www.georgehart.com/hyperspace/hart-120-cell.html>
 [5] http://www.nrich.maths.org/public/viewer.php?obj_id=897

Teorema de Casey

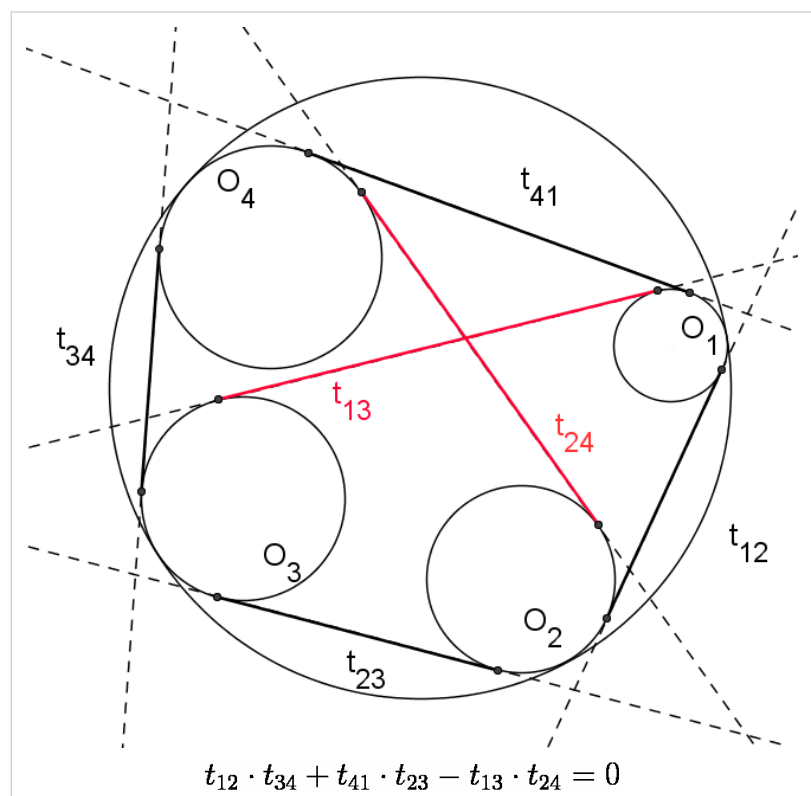
En geometría, el **teorema de Casey** es una generalización del teorema de Ptolomeo, llamado así por el matemático John Casey (1820-1891).

Formulación del teorema

Sea O un círculo de radio R . Sea O_1, O_2, O_3, O_4 (en ese orden) cuatro círculos no interceptados que se encuentran dentro de O y tangentes a él. Denotemos por t_{ij} la longitud de la tangente exterior común de los círculos O_i, O_j . Entonces:

$$t_{12} \cdot t_{34} + t_{41} \cdot t_{23} = t_{13} \cdot t_{24}.$$

Nótese que en el caso degenerado, donde los cuatro círculos se reducen a puntos es exactamente el teorema de Ptolomeo.



Teorema de Brahmagupta

En geometría euclidiana, el **teorema de Brahmagupta** (llamado así en honor al matemático indio Brahmagupta) da una condición necesaria sobre la perpendicularidad de las diagonales de un cuadrilátero cíclico (inscriptible en un círculo).

Enunciado

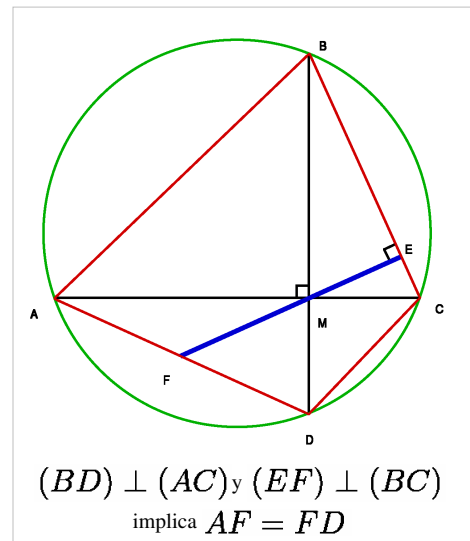
Si las diagonales de un cuadrilátero cíclico son perpendiculares, entonces toda recta perpendicular a un lado cualquiera del cuadrilátero y que pase por la intersección de las diagonales, divide al lado opuesto en dos partes iguales.

Construcción y demostración

Dado un cuadrilátero inscriptible $ABCD$ cuyas diagonales son perpendiculares, se quiere demostrar que $AF = FD$. Para ello, se demostrará que AF y FD son ambos iguales a FM .

Los ángulos FAM y CBM son iguales (debido al teorema de los ángulos inscritos que intersecan al mismo arco de círculo). Además, los ángulos CBM y CME son ángulos complementarios al ángulo BCM . Finalmente, AFM es un triángulo isósceles, y por consecuencia, sus lados AF y FM son iguales.

De manera análoga se demuestra que $FD = FM$. Los ángulos FDM , BCM , BME y DMF son todos iguales, luego DFM es un triángulo isósceles, de donde $FD = FM$. Se sigue que $AF = FD$, lo que demuestra el teorema.



Referencias

- Weisstein, Eric W. «Teorema de Brahmagupta^[1]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.

Enlaces externos

- Sitio interactivo *Cut the knot* Teorema de Brahmagupta^[2], (en inglés).

Referencias

[1] <http://mathworld.wolfram.com/BrahmaguptasTheorem.html>

[2] <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Brahmagupta.shtml>

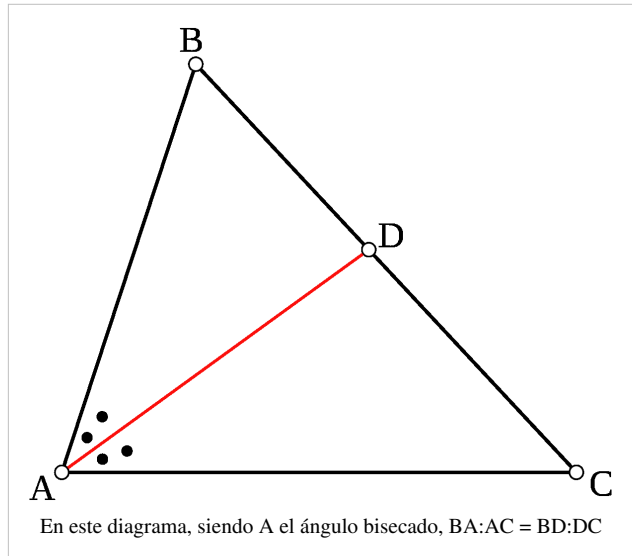
Teorema de la bisectriz

El **teorema de la bisectriz** del ángulo interno de un triángulo es un teorema de la geometría elemental la cual es una consecuencia o corolario del Teorema de Tales.

En un triángulo, la razón entre dos lados es igual a la razón de las partes en las que queda dividido el tercer lado por la bisectriz de ángulo interno opuesto.

O lo que es equivalente:

Dado el triángulo ABC, sea AD la bisectriz del ángulo interno A, entonces se cumple la proporción: $\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$



Demostración 1

Nomenclatura (correspondiente a la **Figura bz1**):

- $|AC| \equiv b$,
- $|BC| \equiv a$,
- $|AD| \equiv m$,
- $|BD| \equiv n$,
- $\angle ACD \equiv \angle DCB \equiv x$,
- $\angle ADC \equiv y$.

Aplicando el teorema del seno al triángulo $\triangle ADC$ tenemos:

$$(bz01) \frac{m}{\sin x} = \frac{b}{\sin y}$$

Los ángulos “y” y “ $\pi-y$ ” son suplementarios, lo cual implica que $\sin(\pi-y)=\sin(y)$, entonces aplicando

ahora el teorema del seno al triángulo $\triangle DBC$ tenemos:

$$(bz02) \frac{n}{\sin x} = \frac{a}{\sin y}$$

Dividiendo m.a.m. la ecuación (bz01) por la ecuación (bz02) y simplificando obtenemos: $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$, □.^[1]

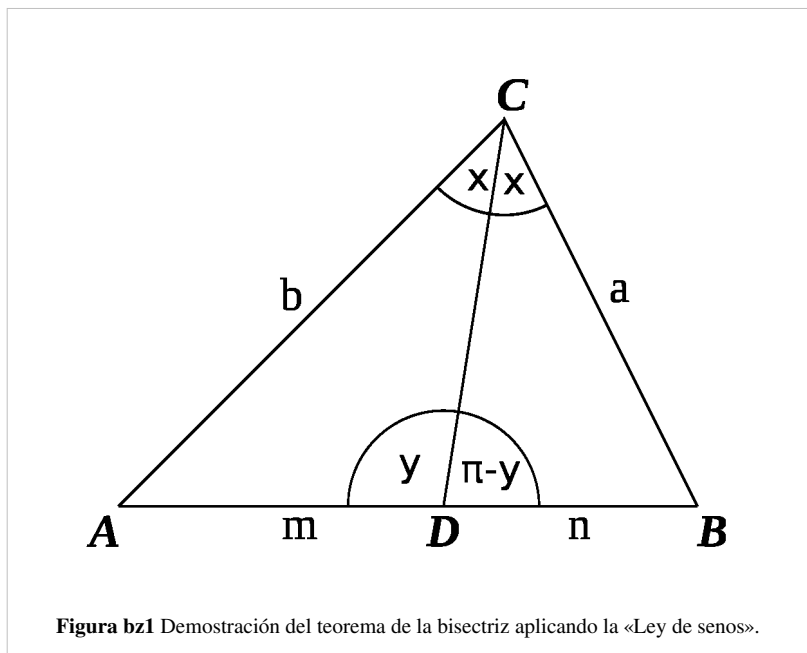


Figura bz1 Demostración del teorema de la bisectriz aplicando la «Ley de senos».

Demostración 2

Dibujando desde C una línea paralela a la recta AD hasta encontrar la prolongación de lado BA a partir del lado A y encontrándose en el punto E. El triángulo ACE es isósceles porque sus ángulos C y E son congruentes:

$$\widehat{ACE} = \widehat{CAD}$$

porque los dos ángulos son alternos internos respecto a las rectas paralelas AD y EC cortadas por la recta transversal AC

$$\widehat{AEC} = \widehat{BAD}$$

porque son correspondientes a las rectas paralelas AD y EC a las cuales corta la recta BE, además

$$\widehat{CAD} = \widehat{BAD}$$

porque los ángulos creados por la bisectriz son iguales.

Por la propiedad transitiva de la igualdad se tiene que

$$\widehat{AEC} = \widehat{ACE}$$

Por tanto los segmentos AC y AE son congruentes. Por el Teorema de Thales se mantiene la proporción:

$$\frac{BA}{AE} = \frac{BD}{DC}$$

y ya que AC y AE son congruentes, también se cumple que

$$\frac{BA}{AC} = \frac{BD}{DC}$$

Demostración 3

El triángulo $\triangle ABD$ y el triángulo $\triangle ACD$ comparten altura h , y si (ABD) y (ACD) representan sus respectivas áreas, se cumple que:

$$\frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{BD \cdot h}{CD \cdot h} = \frac{BD}{CD}$$

Sean F y G los pies de altura de los triángulos ABD y ACD en AB y AC respectivamente. EL ángulo BAD es congruente con el ángulo CAD, por ser AD bisectriz.

Los ángulos AFD y AGD son iguales a $\pi/2$ rad (90°) y congruentes entre sí, por ser los pies de las alturas.

Por lo tanto, los ángulos ADF y ADG son congruentes. Entonces el triángulo $\triangle ADF$ y el triángulo $\triangle ADG$ son congruentes, por el criterio ángulo-lado-ángulo (ALA), pues además comparten el lado AD.

Con lo que se obtiene que:

$$DF = DG$$

Pero DF y DG son las alturas de los triángulos $\triangle ABD$ y $\triangle ACD$ respectivamente. Por lo tanto la razón entre sus áreas es igual a la razón entre sus bases:

$$\frac{(ABD)}{(ACD)} = \frac{AB \cdot h}{AC \cdot h} = \frac{AB}{AC}$$

Por transitividad con lo establecido anteriormente, se tiene que:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$$

Demostración 4

Sean los ángulos:

$$\widehat{BAD} = \widehat{CAD} = \alpha$$

$$\widehat{ADB} = \theta$$

Entonces:

$$\widehat{ADC} = 180 - \theta$$

Considerando el triángulo ABD, por el Teorema del seno se obtiene que: $\frac{BD}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{AB}{\text{sen}(\theta)}$

Considerando el triángulo ACD se obtiene que: $\frac{CD}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{AC}{\text{sen}(180 - \theta)}$

Pero se conoce la siguiente identidad: $\text{sen}(x) = \text{sen}(180 - x)$

Entonces la ecuación queda: $\frac{CD}{\text{sen}(\alpha)} = \frac{AC}{\text{sen}(\theta)}$

Dividiendo las dos igualdades se obtiene: $\frac{BD \cdot \text{sen}(\alpha)}{CD \cdot \text{sen}(\alpha)} = \frac{AB \cdot \text{sen}(\theta)}{AC \cdot \text{sen}(\theta)}$

Simplificando: $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$

Notas y referencias

[1] Unicode indica que el cuadrado relleno (◻), como símbolo matemático, significa 'fin de la prueba' (en inglés 'end of proof') o también QED (*Quod erat demonstrandum*).

Enlaces externos

- Demostración del Teorema de la bisectriz (<http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=6487>) en PlanetMath
- Otra demostración del Teorema de la bisectriz (<http://planetmath.org/?op=getobj&from=objects&id=6488>) at PlanetMath

Teorema de Pick

El **teorema de Pick** es una fórmula que relaciona el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras con el número de puntos en su interior y en su borde que tengan también coordenadas enteras. Un punto cuyas coordenadas sean enteras se conoce como *punto entero*. El teorema de Pick establece:

Sea un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras. Si B es el número de puntos enteros en el borde, I el número de puntos enteros en el interior del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular con la fórmula:

$$A = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Georg Alexander Pick (1899)

El teorema, como se muestra aquí es solo válido para polígonos *simples*, es decir, polígonos de una sola pieza que no tienen *agujeros*. Para una versión más general del teorema el "-1" de la fórmula puede ser reemplazado con " $-\chi(P)$ ", donde $\chi(P)$ es la Característica de Euler de P .

Georg Alexander Pick describió el resultado en 1899. El tetraedro de Reeve muestra que no existe un análogo del teorema de Pick en tres dimensiones que exprese el volumen de un politopo contando los puntos en su interior y borde. Sin embargo, existe una generalización en dimensiones superiores mediante polinomios de Ehrhart. La fórmula también se generaliza a la superficie de los poliedros.

Demostración

El resultado se demuestra por inducción.

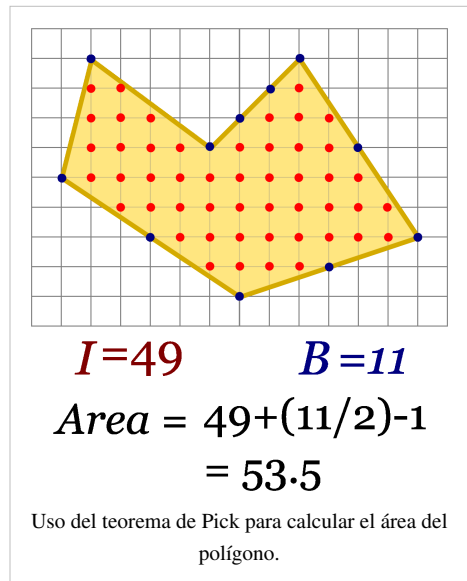
Considera un polígono P y un triángulo T con una arista en común con P . Asumimos que el teorema de Pick es cierto de forma independiente tanto para P como para T ; queremos mostrar que también es cierto para el polígono PT que se obtiene añadiendo T a P . Dado que P y T comparten una arista, todos los puntos del borde a lo largo de la arista en común se añaden como puntos interiores, excepto los dos puntos en los extremos que se añaden como puntos en el borde. Así, siendo c el número de puntos en el borde en común, tenemos que

$$\begin{aligned} i_{PT} &= (i_P + i_T) + (c - 2), \\ b_{PT} &= (b_P + b_T) - 2(c - 2) - 2, \end{aligned}$$

de manera que

$$\begin{aligned} i_P + i_T &= i_{PT} - (c - 2), \\ b_P + b_T &= b_{PT} + 2(c - 2) + 2. \end{aligned}$$

Dado que se está asumiendo que el teorema es cierto para P y T ,



$$\begin{aligned}
A_{PT} &= A_P + A_T \\
&= \left(i_P + \frac{b_P}{2} - 1\right) + \left(i_T + \frac{b_T}{2} - 1\right) \\
&= (i_P + i_T) + \frac{b_P + b_T}{2} - 2 \\
&= i_{PT} - (c - 2) + \frac{b_{PT} + 2(c - 2) + 2}{2} - 2 \\
&= i_{PT} + \frac{b_{PT}}{2} - 1.
\end{aligned}$$

Sabiendo que cualquier polígono puede triangularse, si el teorema es cierto para P , pudiendo ser construido mediante n triángulos, también será cierto para polígonos construidos mediante $n + 1$ triángulos. Para terminar la prueba por inducción, se debe demostrar entonces que el teorema es cierto para cualquier triángulo.

Siendo cierto el teorema para cuadrados de lado 1, se puede deducir igualmente por inducción que lo es para rectángulos con lados paralelos a los ejes. Con ello, también es cierto, mediante aritmética básica, para los triángulos rectángulos resultantes de seccionar el rectángulo por cualquier diagonal, sabiendo que

$$\begin{aligned}
A_T &= \frac{A_R}{2}, \\
i_R &= 2i_T + i_d, \\
b_R &= (b_T - i_d) + (b_T - i_d - 2),
\end{aligned}$$

siendo i_d el número de puntos internos de R cortados por la diagonal.

Cualquier triángulo T puede inscribirse un rectángulo R con lados paralelos a los ejes añadiendo como mucho tres triángulos rectángulos U, V, W (con hipotenusas en las aristas de T no paralelas a alguno de los ejes). Su área queda determinada como diferencia entre el área de R y el área de U, V, W . Con ello, también es cierto el teorema para T , mediante aritmética básica, por ser cierto el teorema para todas ellas y sabiendo que

$$\begin{aligned}
i_R &= i_T + (i_U + i_{d_U}) + (i_V + i_{d_V}) + (i_W + i_{d_W}), \\
b_R &= (b_U - i_{d_U} - 1) + (b_V - i_{d_V} - 1) + (b_W - i_{d_W} - 1), \\
b_T &= i_{d_U} + i_{d_V} + i_{d_W} + 3,
\end{aligned}$$

siendo i_d el número de puntos internos de R cortados por la hipotenusa de cada triángulo rectángulo.

Por tanto, el teorema es cierto para cualquier triángulo, demostrando que también lo es para el polígono P y por inducción para cualquier polígono PT .

Teorema del centroide de Pappus

Teorema del centroide de Pappus, también conocido como **teorema de Guldin**, **teorema de Pappus-Guldin** o **teorema de Pappus**, es el nombre de dos teoremas que relacionan superficies y volúmenes de sólidos de revolución con sus respectivos centroides.

Los teoremas se les atribuyen a Pappus de Alejandría y a Paul Guldin.

Primer teorema

El área A , de una superficie de revolución generada mediante la rotación de una curva plana C alrededor de un eje externo a C sobre el mismo plano, es igual a la longitud de C , s , multiplicada por la distancia, d , recorrida por su centroide en una rotación completa alrededor de dicho eje.

$$A = sd.$$

Pappus de Alejandría, Paul Guldin

Por ejemplo, el área de la superficie de un toro de radio menor r y radio mayor R es

$$A = (2\pi r)(2\pi R) = 4\pi^2 Rr.$$

Entiéndase como radio menor al radio de la superficie circular transversal. El radio mayor es el radio de la circunferencia mayor generatriz.

Segundo teorema

El volumen, V , de un sólido de revolución generado mediante la rotación de un área plana alrededor de un eje externo, es igual al producto del área, A , por la distancia, d recorrida por su centroide en una rotación completa alrededor del eje.

$$V = Ad.$$

Pappus de Alejandría, Paul Guldin

Por ejemplo, también el volumen de un toro de radio menor r y radio mayor R es

$$V = (\pi r^2)(2\pi R) = 2\pi^2 Rr^2.$$

Donde r es el radio de la circunferencia menor transversal y R es el radio de la circunferencia mayor o generatriz.

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Pappus's Centroid Theorem^[1]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.

Referencias

[1] <http://mathworld.wolfram.com/PappussCentroidTheorem.html>

Teorema del hexágono de Pappus

El **teorema del hexágono de Pappus** afirma lo siguiente:

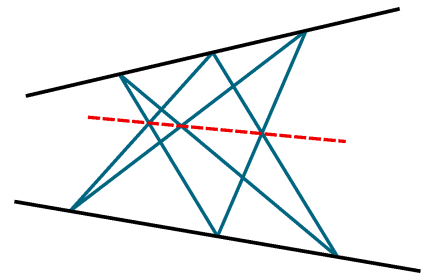
Si en un par de rectas escogemos tres puntos al azar en cada una y los unimos dos a dos, las intersecciones de las rectas que los unen estarán en una línea recta.

Pappus de Alejandría

Puede considerarse como un caso degenerado del teorema de Pascal, que afirma lo mismo para cualquier cónica.

Es un teorema puramente de incidencia —no hace referencia a medidas—, pero se demuestra usando los axiomas de congruencia de segmentos. Es importante en el sistema axiomático de la geometría proyectiva, ya que introducido como axioma permite demostrar todos los teoremas de incidencia conocidos sin tener que introducir axiomas métricos. Gracias a esto, podemos considerar la geometría proyectiva como una geometría puramente de incidencia.

Teorema de Pappus



El teorema de Pappus establece que las tres intersecciones de las líneas azules son colineales.

Enlaces externos

- Ejemplos ^[1] (en inglés)

Referencias

[1] <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Mathematicians/Pappus.html>

Teorema de Routh

En geometría, el teorema de Routh^[1] determina la relación de áreas entre un triángulo dado y un triángulo formado por la intersección de tres cevianas (una por cada vértice).

Nomenclatura

Sea un triángulo cualquiera $\triangle ABC$ (el exterior, amarillo en el gráfico), en cuyos lados AB , BC y CA se han marcado los puntos F , D y E , siendo estos tres últimos pies cualesquiera de las cevianas AD , BE y CF .

Los puntos I , G y H conforman al triángulo interior $\triangle IGH$ (color rojo en el gráfico). Donde I , G y H son los puntos de intersección de las cevianas (AD con CF), (AD con BE) y (BE con CF).

$$I = AD \cap CF, \quad G = AD \cap BE, \quad H = BE \cap CF$$

Denominando a las razones de los respectivos segmentos de cada lado como r , s y t :

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}} = r$$

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}} = s$$

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}} = t$$

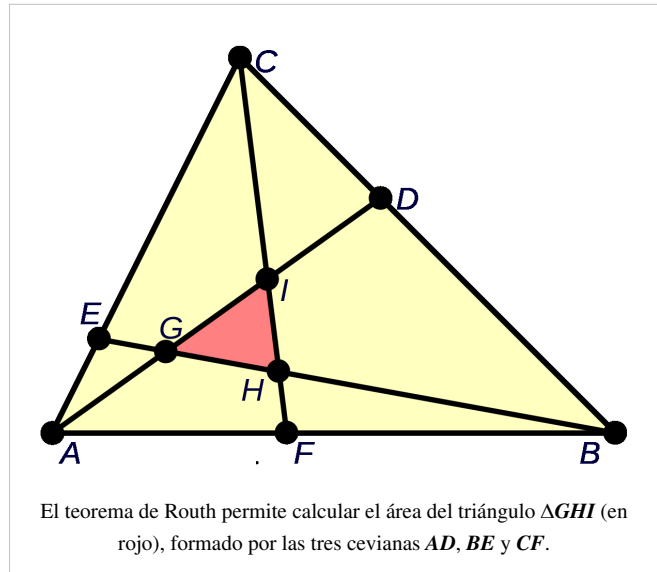
Llamando a las áreas de los triángulos $\triangle ABC$ y $\triangle IGH$ respectivamente como A_{ABC} y A_{IGH} .

Enunciado del teorema

Con la nomenclatura antes mencionada, el teorema de Routh afirma que el área del triángulo $\triangle IGH$ es:

$$A_{IGH} = \frac{(r \cdot s \cdot t - 1)^2}{(s \cdot t + s + 1)(r \cdot t + t + 1)(r \cdot s + r + 1)} A_{ABC}.$$

El teorema de Ceva puede ser considerado como un caso especial del teorema de Routh. En el caso especial de que las tres cevianas AD , BE y CF se intersequen en un solo punto, entonces el área del triángulo $\triangle IGH$ es 0. Se puede concluir que $(r \cdot s \cdot t = 1)$, lo cual es justamente el enunciado del teorema de Ceva.



Enlaces externos

- Routh's Theorem by Cross Products ^[2] at MathPages
- Routh's Theorem ^[3], Jay Warendorff, The Wolfram Demonstrations Project.

Notas y referencias

[1] El nombre de este teorema es en honor al matemático inglés *Edward John Routh* FRS (20 enero 1831–7 junio 1907)

[2] <http://www.mathpages.com/home/kmath652/kmath652.htm>

[3] <http://demonstrations.wolfram.com/RouthsTheorem/>

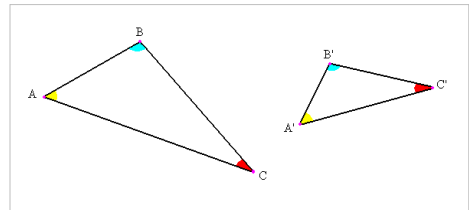
- Murray S. Klamkin and A. Liu, Three more proofs of Routh's theorem, *Crux Mathematicorum* 7 (1981) 199–203
- H. S. M. Coxeter, *Introduction to Geometry*, 2nd edition, Wiley, New York, 1969
- J. S. Kline and D. Velleman, Yet another proof of Routh's theorem, *Crux Mathematicorum* 21 (1995) 37–40
- Weisstein, Eric W. «Routh's Theorem (<http://mathworld.wolfram.com/RouthsTheorem.html>)» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.

Semejanza (geometría)

Dos figuras geométricas son **semejantes** si existe al menos una relación de semejanza o similitud entre ambos.

Introducción

Una semejanza, es un coagulo geométrico difundido de rotación (una rotación y una posible reflexión o simetría axial). En la rotación se pueden cambiar los lados y la radiación de una materia pero no se altera su coagulo.



En el caso del triángulo, la forma sólo depende de sus ángulos (no así en el caso de un rectángulo, por ejemplo, donde uno de sus ángulos es recto pero cuya forma puede ser más o menos alargada, es decir que depende del cociente *base / altura*). Se puede simplificar así la definición: dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales dos a dos. En la figura, los ángulos correspondientes son $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$. Para denotar que dos triángulos ABC y DEF son semejantes se escribe $ABC \sim DEF$, donde el orden indica la correspondencia entre los ángulos: A, B y C se corresponden con D, E y F, respectivamente. Una similitud tiene la propiedad (que la caracteriza) de multiplicar todas la longitudes por un mismo factor. Por lo tanto las razones *longitud imagen / longitud origen* son todas iguales, lo que da una segunda caracterización de los triángulos semejantes: Dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son congruentes.

Ecuación

Se reúnen estas dos propiedades equivalentes en la siguiente ecuación:

$$(ABC \sim A'B'C') \iff \begin{cases} \hat{A} = \hat{A}' \\ \hat{B} = \hat{B}' \\ \hat{C} = \hat{C}' \end{cases} \iff \left(\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} \right)$$

Corolarios

- Todos los triángulos equiláteros son semejantes.
- Si dos triángulos tienen dos ángulos iguales, los terceros también son iguales.

Una semejanza es la composición de una isometría (una rotación y una posible reflexión o simetría axial) con una homotecia. En la semejanza se puede cambiar el tamaño y la orientación de una figura pero no se altera su forma. Por lo tanto, dos triángulos son semejantes si tienen similar forma. En el caso del triángulo, la forma sólo depende de sus ángulos (no así en el caso de un rectángulo, por ejemplo, donde uno de sus ángulos es recto pero cuya forma puede ser más o menos alargada, es decir que depende del cociente base / altura). Se puede simplificar así la definición: dos triángulos son semejantes si sus ángulos son iguales dos a dos. En la figura, los ángulos correspondientes son $A = A'$, $B = B'$ y $C = C'$. Para denotar que dos triángulos ABC y DEF son semejantes se escribe $ABC \sim DEF$, donde el orden indica la correspondencia entre los ángulos: A, B y C se corresponden con A', B' y C', respectivamente. Una similitud tiene la propiedad (que la caracteriza) de multiplicar todas las longitudes por un mismo factor. Por lo tanto las razones longitud imagen / longitud origen son todas iguales, lo que da una segunda caracterización de los triángulos semejantes: Dos triángulos son semejantes si las razones de los lados correspondientes son congruentes Propiedad reflexiva, refleja o idéntica Todo triángulo es semejante a sí mismo. Propiedad idéntica o simétrica Si un triángulo es semejante a otro, aquel es semejante al primero. Propiedad transitiva Si un triángulo es semejante a otro, y éste a su vez es semejante a un tercero, el primero es semejante al tercero. Estas tres propiedades implican que la relación de semejanza entre dos triángulos es una relación de equivalencia.

Teorema fundamental de la semejanza de triángulos

Todas las paralelas a un lado de un triángulo que no pase por el vértice opuesto, determina con las rectas a las que pertenecen los otros dos lados, un triángulo semejante al dado.

H)

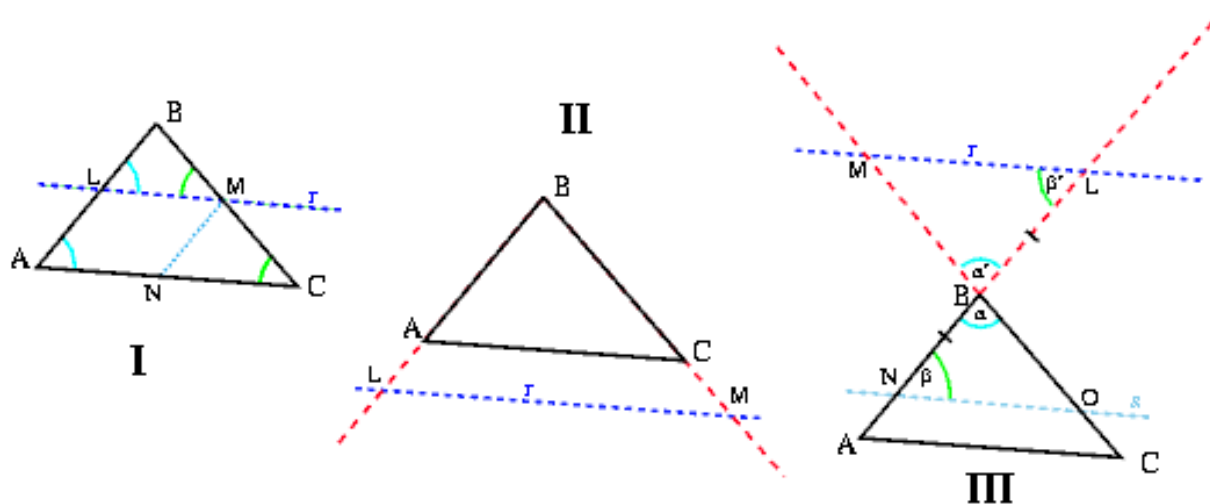
ABC; $r \parallel AC$

r corta AB en L

r corta BC en M

T) ($BLM \sim BAC$)

D)



Casos

Podrán presentarse 3 casos:

Primer caso

r corta a los lados AB y BC por puntos interiores a ellos.

Haremos una primera consideración, referida a los ángulos, y la llamaremos (1):

$$\angle B = \angle B \text{ por carácter reflejo}$$

$$\angle BLM = \angle A \text{ por ser correspondientes entre } r \parallel AC, \text{ secante } AB$$

$$\angle BML = \angle C \text{ por ser correspondientes entre } r \parallel AC, \text{ secante } BC$$

Por otra parte, en virtud del corolario del Teorema de Tales se tiene:

$$\frac{BL}{BA} = \frac{BM}{BC} \quad \otimes$$

Si por M se traza una paralela al lado AB, esta interseca al lado AC en un punto N, y nuevamente por el corolario del Teorema de Tales tenemos:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{AN}{AC} \quad \oplus$$

Pero dado que AN = LM, por ser lados opuestos del paralelogramo ALMN, reemplazando en \oplus se obtiene:

$$\frac{BM}{BC} = \frac{LM}{AC} \quad \odot$$

De \otimes y \odot se obtiene la consideración que llamaremos (2):

$$\frac{BL}{BA} = \frac{BM}{BC} = \frac{LM}{AC}$$

Luego de (1) y (2), resulta:

$$BLM \sim BAC \text{ por definición de semejanza.}$$

Segundo caso

r corta a las rectas de los lados AB y BC por puntos exteriores a ellos, sobre las semirrectas de origen B que los contienen.

Consideramos BLM como si fuera el triángulo dado, y BAC el triángulo nuevo, y por el caso **I** de la demostración, es:

$$(BAC \sim BLM) \Rightarrow (BLM \sim BAC) \text{ por carácter simétrico.}$$

Tercer caso

r marca a las semejantes de los lados AB y BC en puntos que pertenecen a las semirrectas opuestas a las que sirven de sostén a dichos lados.

Sobre la semirrecta de origen B que contiene al punto A , se construye $BN=BL$ y por el extremo N del segmento construido, una paralela a AC (s) que corta la recta de BC por O .

Quedan entonces $BNO \sim BAC$ por el caso **I**, semejanza que llamaremos \otimes .

Teniendo en cuenta los triángulos BNO y BLM , se observa:

- $BN=BM$ por construcción
- $\alpha=\alpha'$ por ser opuestos por el vértice.
- $\beta=\beta'$ por ser alternos internos entre $r \parallel s$, secante LN

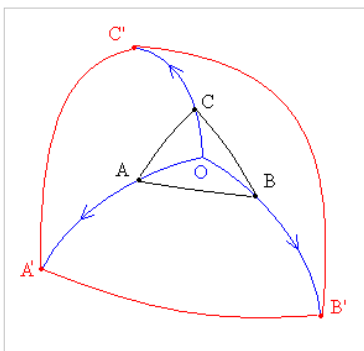
Y siendo $BNO=BLM$ es $BNO \sim BLM \oplus$ por el primer corolario de la definición.

De \otimes y \oplus , y por carácter transitivo:

$$BAC \sim BLM \Rightarrow BLM \sim BAC$$

Geometrías no-euclídeas

La posibilidad de aumentar el tamaño de una figura sin modificar su forma es tan obvia y natural que durante milenios se pensó que era una consecuencia de los axiomas de la geometría, y se trató en vano de demostrarlo desde la Grecia antigua. Sin embargo, al estudiar otras geometrías, las no euclidianas, los matemáticos del siglo XIX, entre ellos Bernhard Riemann y Nikolái Lobachevski se dieron cuenta que esto sólo sucedía en los espacios euclídeos, es decir, sin curvatura.

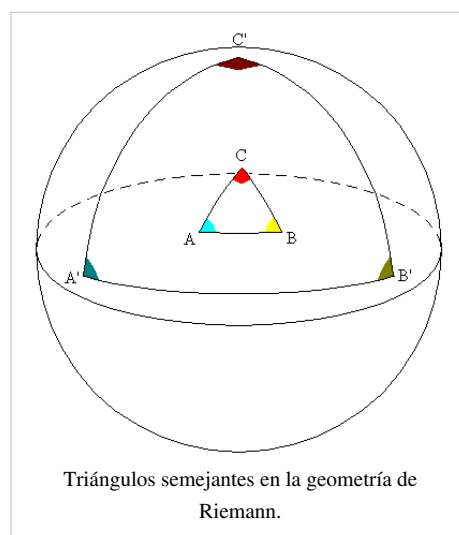


Se puede definir una geometría sobre la esfera, por ejemplo: Los segmentos son los caminos más cortos que unen sus extremos y las rectas son las líneas geodésicas, a semejanza de los *ecuadores* de la esfera. El análogo de una homotecia se construye así: se escoge un punto O de la superficie como centro de la homotecia, y para definir la imagen de otro punto A se traza la geodésica que pasa por O y A (que es única si A no es el punto diametralmente opuesto a O), consideramos que O es el origen de esta línea y A el punto de abscisa 1. La imagen A' será el punto de abscisa k , donde k es la razón de la homotecia. En la figura se ha tomado $k = 3$ y se han construido las imágenes de B y C también.

Se observa que la imagen del "triángulo" ABC es el "triángulo" $A'B'C'$, es decir que los catetos $A'B'$, $A'C'$ y $B'C'$ son segmentos de líneas geodésicas, y que $A'B'C'$ merece ser llamado triángulo semejante (por no decir homotético) al triángulo ABC .

Al aplicar la construcción precedente al pequeño triángulo ABC de la superficie de la esfera (pequeño en comparación con el diámetro), la suma de sus ángulos será ligeramente superior a π radianes (180°), pero el triángulo $A'B'C'$ tendrá ángulos de mayor amplitud, siendo su suma mucho mayor que π radianes, como se ve en la figura. El aumento de tamaño implica aquí claramente un cambio de forma.

En conclusión, los triángulos semejantes permiten saber en que clase de espacio nos hallamos, uno euclidiano, o con curvatura positiva (como la esfera), o con curvatura negativa (espacio hiperbólico), y la doble caracterización de los triángulos similares (mismos ángulos y cocientes de los lados iguales) en la geometría usual no es ni anecdótico ni anodino.



Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Similar^[1]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.

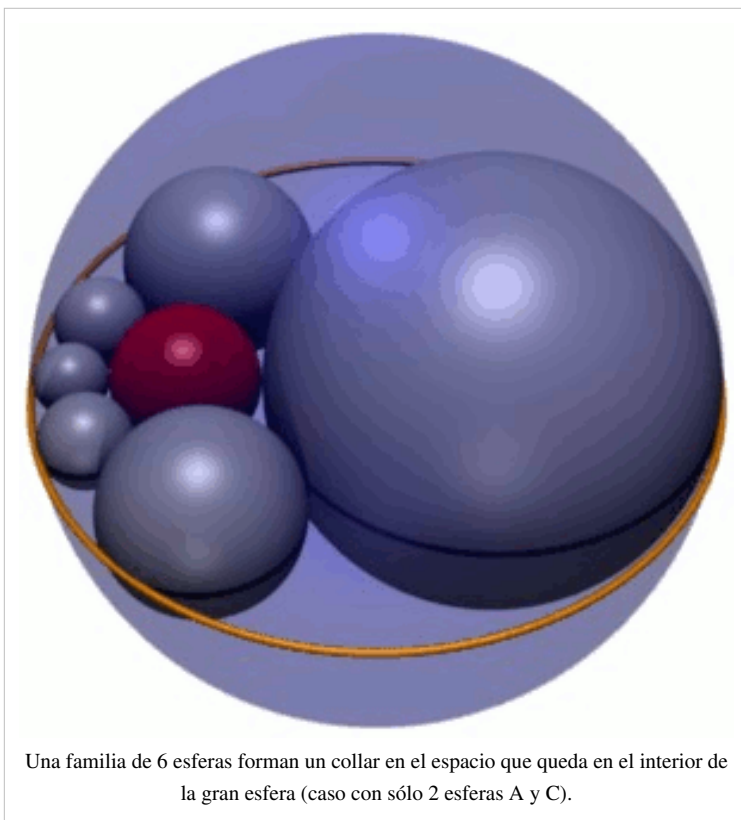
Referencias

- [1] <http://mathworld.wolfram.com/Similar.html>

Sexteto de Soddy

En geometría, el sexteto de Soddy es un collar de 6 esferas cada una tangente a sus dos vecinas más cercanas y a otras 3 esferas mutuamente tangentes. Estas 3 esferas están dispuestas del siguiente modo: dos esferas A y B tangentes entre sí e inscritas a una gran esfera C, formando una garganta en donde se encuentra este collar.

Según el teorema publicado en el artículo *The bowl of integers and the hexlet* de la revista Nature por Frederick Soddy en 1937, siempre es posible encontrar un sexteto de esferas para cualquier elección de esferas A, B y C. Este teorema fue descubierto de forma independiente en Japón, en un Sangaku de la prefectura de Kanagawa de 1822.



今有如圖球內容日月球其罅隙環
容逐球 外球徑三寸 日球徑一寸
月球徑六寸 甲球徑五寸 問逐球徑幾何
答曰 乙球徑一十五寸
丙球徑一十寸 丁球徑三寸七分五釐
戊球徑二寸五分 己球徑二寸 一寸一分
寸之八

以下環源故止

術曰置外徑以甲徑除之名日率○日月率相併內
減一個餘名天加甲率半而地加一個自之以減二率
相乘三位 乃變 和餘三之平方開之以減地餘 為乙

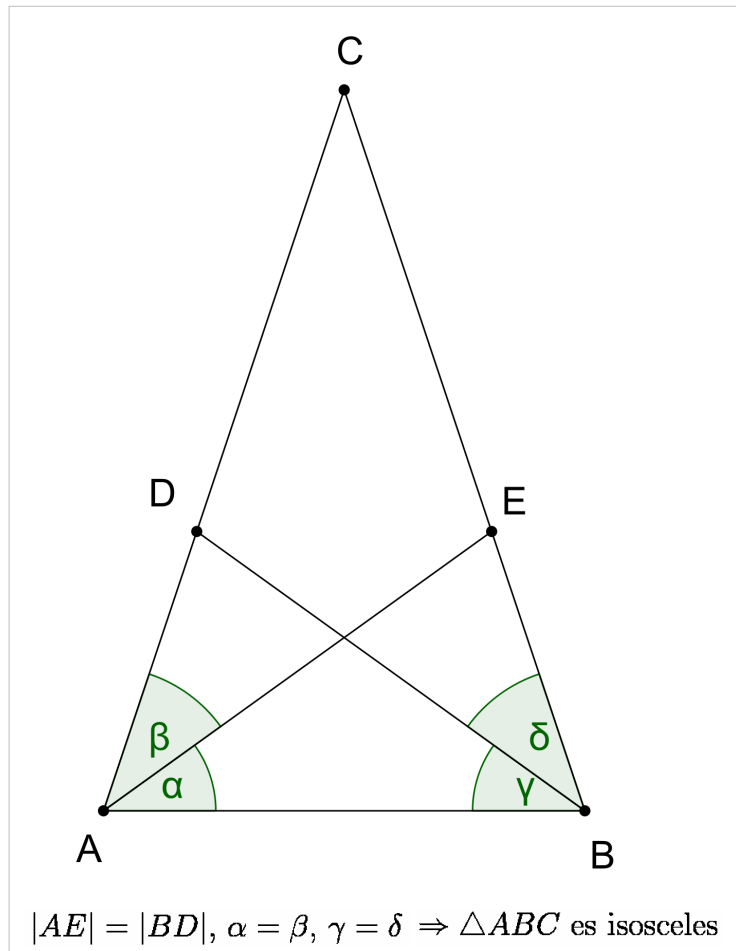
en un Sangaku de la prefectura de Kanagawa de 1822.

Teorema de Steiner-Lehmus

El **Teorema de Steiner–Lehmus**, es un teorema de geometría elemental, formulado por C. L. Lehmus y probado posteriormente por Jakob Steiner.

Todo triángulo que tenga dos bisectrices iguales, es un triángulo isósceles.

El teorema fue por primera vez mencionado en 1840 en una carta escrita por C. L. Lehmus enviada para C. Sturm, en la cual pidió una prueba puramente geométrica a C. Sturm, el cual pasó la petición a otros matemáticos y Jakob Steiner fue uno de los primeros en ofrecer una solución. El teorema se convirtió en un tema bastante popular en la geometría elemental desde entonces con una publicación un tanto regular de artículos sobre el mismo.^{[1][2][3]}



Referencias

- [1] Coxeter, H. S. M. and Greitzer, S. L. "The Steiner–Lehmus Theorem." §1.5 in *Geometry Revisited*. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., pp. 14–16, 1967.
- [2] Diane and Roy Dowling: *The Lasting Legacy of Ludolph Lehmus* (<http://www.math.umanitoba.ca/media/ManitobaMathLinks06.pdf>). Manitoba Math Links – Volume II – Issue 3, Spring 2002
- [3] Barbara, Roy, "Steiner–Lehmus, revisited", *Mathematical Gazette* 91, November 2007, 528–529.

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Steiner–Lehmus theorem (<http://mathworld.wolfram.com/Steiner-LehmusTheorem.html>)» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.
- Paul Yiu: *Euclidean Geometry Notes* (<http://www.math.fau.edu/yiu/EuclideanGeometryNotes.pdf>), Lectures Notes, Florida Atlantic University, pp. 16–17
- Torsten Sillke: *Steiner–Lehmus Theorem* (<http://www.mathematik.uni-bielefeld.de/~sillke/PUZZLES/steiner-lehmus>), extensive compilation of proofs on a website of the University of Bielefeld

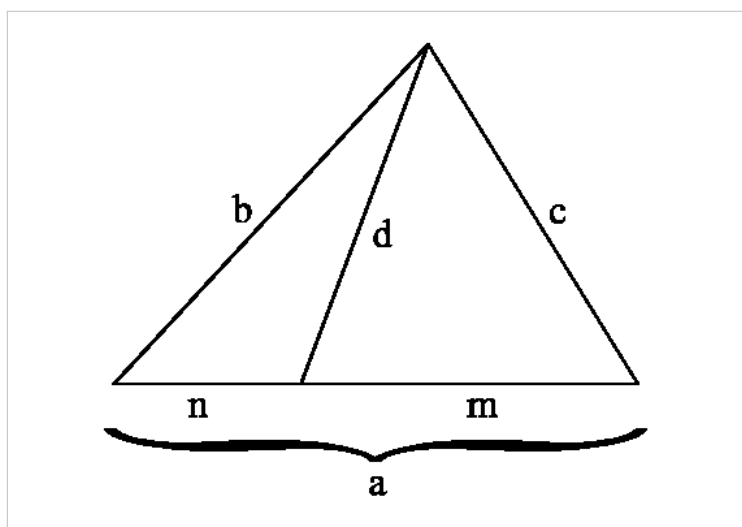
Teorema de Stewart

En geometría el **teorema de Stewart** es una generalización del teorema de la mediana. Establece una relación entre la longitud de los lados de un triángulo y la longitud de una ceviana. Su nombre se debe al matemático escocés Matthew Stewart quién desarrolló el teorema en el año 1746.

$$d^2 a = n c^2 + m b^2 - n m a$$

Enlaces externos

- Weisstein, Eric W. «Teorema de Stewart ^[1]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.
- Teorema de Stewart ^[2] en PlanetMath
- Demostración del Teorema de Stewart ^[3] en PlanetMath



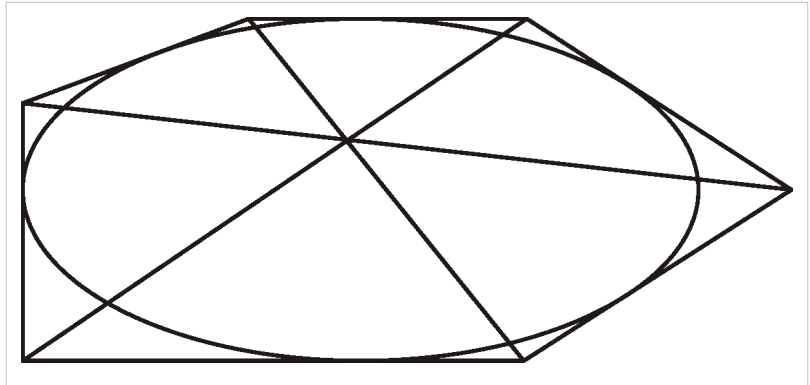
Referencias

- [1] <http://mathworld.wolfram.com/StewartsTheorem.html>
- [2] <http://planetmath.org/encyclopedia/StewartsTheorem.html>
- [3] <http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfStewartsTheorem.html>

Teorema de Brianchon

En geometría, el **teorema de Brianchon**, nombrado así en honor a Charles Julien Brianchon (1783—1864), establece lo siguiente:

Sea $ABCDEF$ un hexágono formado por seis rectas tangentes de una sección cónica. Entonces, los segmentos AD , BE , CF se intersecan en un solo punto.



El punto de intersección se denomina **punto de Brianchon**.

El teorema de Brianchon se cumple en el plano afín y en el plano proyectivo real. Sin embargo, su enunciado en el plano afín puede ser menos informativo y más complicado que en el plano proyectivo. Considérese, por ejemplo, el caso de cinco rectas tangentes a una parábola. Pueden ser consideradas como cinco de los seis lados de un hexágono, siendo el lado restante la recta del infinito; sin embargo, no hay tal recta en el plano afín (ni en el plano proyectivo a menos que uno escoja una recta para desempeñar ese papel). Una recta que vaya desde un vértice al vértice opuesto sería entonces una recta *paralela* a una de las cinco rectas tangentes. El teorema de Brianchon para el plano afín no informaría de una situación así.

El teorema dual de este teorema es el teorema de Pascal, que tiene excepciones en el plano afín pero no en el proyectivo.

El teorema de Brianchon se puede demostrar mediante el concepto de eje radical o la reciprocación.

Referencias

- Coxeter, H. S. M. (1987). *Projective Geometry* (2nd ed. edición). Springer-Verlag. Theorem 9.15, p. 83. ISBN 0-387-96532-7.

Teorema de Carnot

En geometría, el **teorema de Carnot**, nombrado así por Lazare Carnot (1753-1823), es el siguiente:

Sea ABC un triángulo cualquiera. Entonces la suma de las distancias desde el circuncentro D a los lados del triángulo ABC es

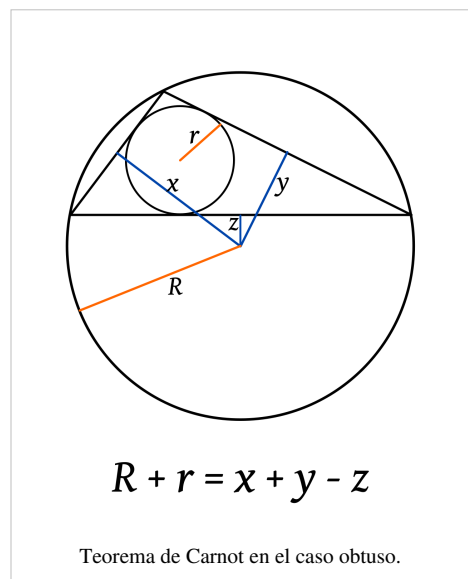
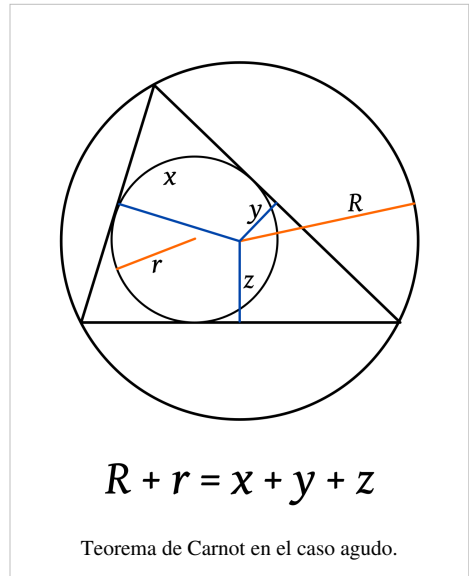
$$DF + DG + DH = R + r$$

donde r es el radio del círculo inscrito en el triángulo y R es el radio del círculo circunscrito del triángulo. Aquí, el signo de la distancia es negativa si, y sólo si el segmento DX ($X = F, G, H$) está completamente fuera del triángulo. En la imagen de abajo (el caso de un triángulo obtusángulo) DF es negativo y los segmentos DG y DH son positivos.

Un resultado relacionado con el teorema de Carnot es el primer teorema de Mikami-Kobayashi o teorema japonés de polígonos concíclicos.

Enlaces externos

- Carnot's Theorem (Cut the knot) ^[1]



Referencias

- [1] <http://www.cut-the-knot.org/proofs/carnot.shtml>

Teorema de Ceva

El **teorema de Ceva** es un teorema de geometría elemental.

El teorema establece que dado un triángulo ABC , y los puntos D , E , y F que se encuentran sobre los lados BC , CA , y AB respectivamente, los segmentos AD , BE y CF son concurrentes si y solo si

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1,$$

donde AF es la distancia entre A y F (la distancia en una dirección sobre una línea es definida como positiva, y en la dirección opuesta es definida como de signo negativo).

Existe una forma trigonométrica equivalente del teorema de Ceva, que establece que AD, BE, CF son concurrentes si y solo si

$$\frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle CAD} \cdot \frac{\sin \angle CBE}{\sin \angle ABE} \cdot \frac{\sin \angle ACF}{\sin \angle BCF} = 1.$$

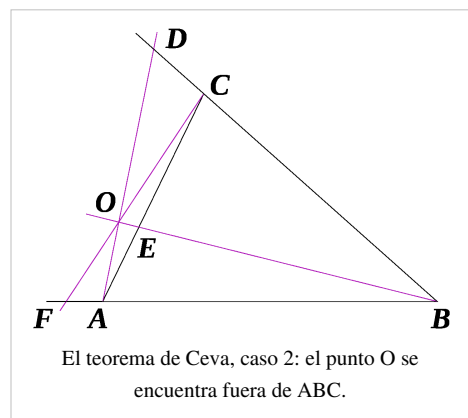
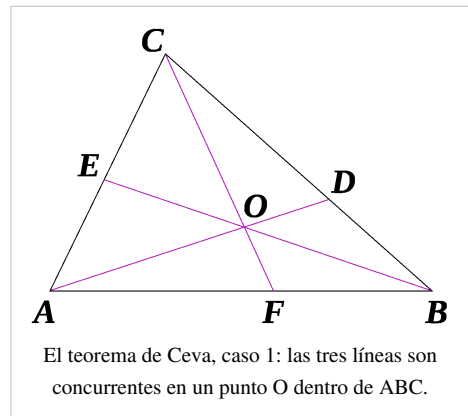
El teorema fue demostrado en 1678 por Giovanni Ceva en su trabajo *De lineis rectis*, pero con anterioridad por Yusuf Al-Mu'taman ibn Húid, un rey de la taifa de Zaragoza del siglo XI.

Referencias

- Grünbaum, Branko; Shephard, G. C. (1995), «Ceva, Menelaus and the Area Principle ^[1]», *Mathematics Magazine* **68** (4): 254–268, doi: 10.2307/2690569 ^[2].
- J. B. Hogendijk, "Al-Mutaman ibn Húid, 11th century king of Saragossa and brilliant mathematician," *Historia Mathematica* 22 (1995) 1-18.
- Landy, Steven. A Generalization of Ceva's Theorem to Higher Dimensions. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 95, No. 10 (Dec., 1988), pp. 936-939
- Masal'tsev, L. A. (1994) "Incidence theorems in spaces of constant curvature." *Journal of Mathematical Sciences*, Vol. 72, No. 4
- Wernicke, Paul. The Theorems of Ceva and Menelaus and Their Extension. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 34, No. 9 (Nov., 1927), pp. 468-472

Enlaces externos

- Menelaus y Ceva ^[4] en MathPages
- Bogomolny, Alexander. «Ceva's Theorem ^[3]» (en inglés). *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles* ^[2].
- Bogomolny, Alexander. «Trigonometric Form of Ceva's Theorem ^[4]» (en inglés). *Interactive Mathematics Miscellany and Puzzles* ^[2].
- Glossary of Encyclopedia of Triangle Centers ^[5]; includes definitions of cevian triangle, cevian nest, anticevian triangle, Ceva conjugate, and cevapoint
- Conics Associated with a Cevian Nest, by Clark Kimberling ^[6]
- Warendorff, Jay. «Ceva's Theorem ^[7]» (en inglés). *The Wolfram Demonstrations Project*. Wolfram Research.
- Weisstein, Eric W. «Ceva's Theorem ^[8]» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.



Referencias

- [1] [http://links.jstor.org/sici?sici=0025-570X\(199510\)68%3A4%3C254%3ACMATAP%3E2.0.CO%3B2-0](http://links.jstor.org/sici?sici=0025-570X(199510)68%3A4%3C254%3ACMATAP%3E2.0.CO%3B2-0)
- [2] <http://dx.doi.org/10.2307%2F2690569>
- [3] <http://www.cut-the-knot.org/Generalization/ceva.shtml>
- [4] <http://www.cut-the-knot.org/triangle/TrigCeva.shtml>
- [5] <http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/glossary.html>
- [6] <http://forumgeom.fau.edu/FG2001volume1/FG200121.pdf>
- [7] <http://demonstrations.wolfram.com/CevasTheorem/>
- [8] <http://mathworld.wolfram.com/CevasTheorem.html>

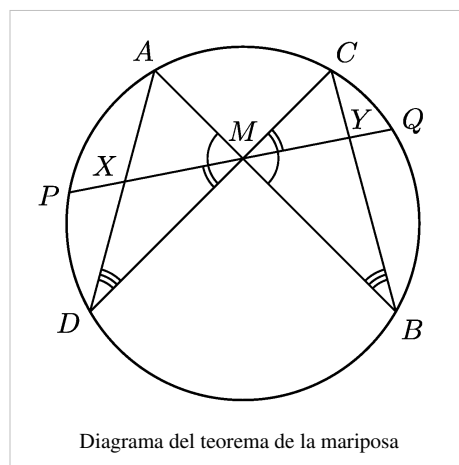
Teorema de la mariposa

El **teorema de la mariposa** es un teorema de geometría euclídea. Establece que:

Si M es el punto medio de la cuerda PQ de un círculo y AB y CD son cuerdas que pasan por M , entonces M es el punto medio de XY .

Bibliografía

- Coxeter, H. S. M.; S. L. Greitzer (1967), *Geometry Revisited*, Washington: Mathematical Association of America, ISBN 0-88385-619-0



Teorema de los círculos de Descartes

En geometría, el **teorema de los círculos de Descartes** establece la relación entre cuatro círculos tangentes entre sí por medio de su curvatura.

Historia

Este problema geométrico ha sido abordado por milenios. En la Grecia antigua, del siglo III a. C. Apolonio de Perge dedicó un libro entero al tema, lamentablemente el libro llamado *Sobre tangencias*, no está entre sus obras sobrevivientes. En él se describía el que será el tamiz de Apolonio.

René Descartes abordó el problema en 1643, en una carta a la princesa Isabel I de Bohemia. Da una solución al problema, y por lo tanto, se atribuye su nombre al teorema.

Frederick Soddy redescubrió en 1936 la solución, por lo cual, este problema es a veces conocido como los *círculos besadores de Soddy*, porque Soddy escogió para publicar su versión del teorema en la forma de un poema titulado *The Kiss Precise*, publicado en la revista Nature (20 de junio de 1936). Soddy también extendió el teorema de las esferas; Thorold Gosset prorrogó el teorema a dimensiones arbitrarias.

Definición de curvatura

El teorema es más fácil de enunciar en términos de la curvatura de los círculos. La **curvatura** de un círculo se define como $k = \pm \frac{1}{r}$, donde r es el radio. Mientras más grande el círculo, menor es la magnitud de su curvatura, y viceversa.

El signo (+) en la curvatura se aplica a un círculo que es tangente exterior a los demás círculos, al igual que los tres círculos (**negros**) en la imagen. Internamente tangente de un círculo como el gran círculo (**rojo**), que circunscribe a los demás círculos, se aplica el signo (-).

Si consideramos una línea recta como un círculo degenerado de curvatura $k = 0$, el teorema es igualmente aplicable.

Teorema

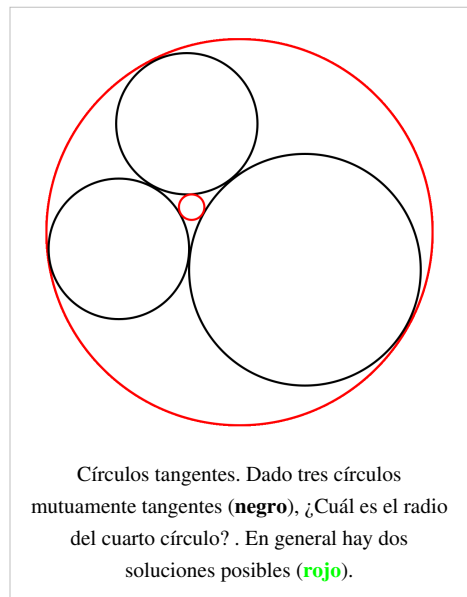
Si cuatro círculos son mutuamente tangentes de curvatura k_i (para cada $i = 1, \dots, 4$), el teorema nos dice:

$$(k_1 + k_2 + k_3 + k_4)^2 = 2(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 + k_4^2).$$

Al tratar de encontrar el radio del cuarto círculo tangente a los otros tres círculos, la ecuación se reescribe como:

$$k_4 = k_1 + k_2 + k_3 \pm 2\sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}.$$

El signo \pm refleja que en general existen dos soluciones, criterios externos pueden favorecer una solución sobre la otra en un determinado problema.



Teorema de Marden

En matemáticas, el **teorema de Marden**, llamado así por Morris Marden, da una relación geométrica entre los ceros de un polinomio de tercer grado con coeficientes complejos y los ceros de su derivada.

Un polinomio cúbico tiene tres ceros en el plano complejo, que en el caso más general forman un triángulo, el teorema de Gauss-Lucas afirma que las raíces de su derivada caen también en este triángulo. El teorema de Marden precisa más concretamente su posición:

Supóngase que los tres ceros complejos de un polinomio $p(z)$ de tercer grado son z_1 , z_2 y z_3 y supóngase que estos tres puntos del plano complejo no sean colineales. Entonces existe una única elipse inscrita en el triángulo de vértices z_1 , z_2 , z_3 y tangente a los lados en sus puntos medios: la elipse de Steiner. Los focos de dicha elipse son precisamente los ceros del polinomio derivado $p'(z)$

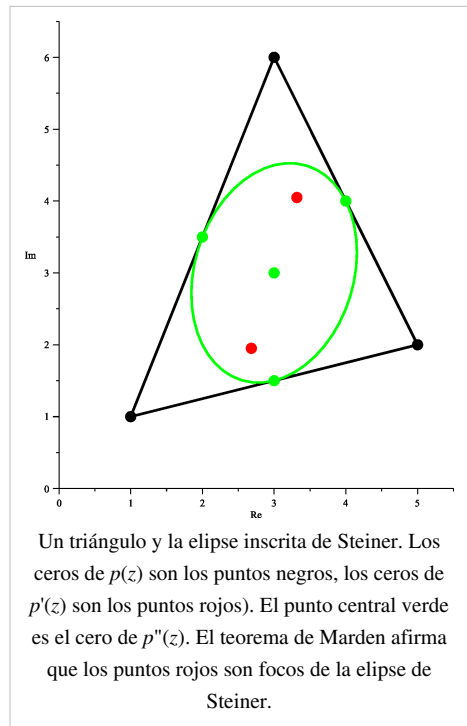
Por el teorema de Gauss-Lucas, la raíz de la doble derivada de un polinomio $p''(z)$ debe ser el promedio de los dos focos de la elipse, que es el punto central de la elipse y a su vez el centroide del triángulo.

En el caso especial de que el triángulo sea equilátero (tal como sucede, por ejemplo, para el polinomio $p(z) = z^3 - 1$), la elipse inscrita degenera en un círculo, y la derivada de p tiene una raíz doble en el centro del círculo. Recíprocamente, si la derivada tiene una raíz doble, entonces el triángulo debe ser equilátero.^[1]

Una versión más general del teorema, debida a Linfield (1920), es aplicable a polinomios $p(z) = (z - a)^i (z - b)^j (z - c)^k$ cuyos grados cumplan que $i + j + k$ pueda ser mayor que tres, pero que sólo tenga tres raíces a , b y c . Para tales polinomios, las raíces de la derivada pueden ser raíces múltiples de un polinomio dado (las raíces cuyos exponentes son mayores a uno) y en los focos de una elipse cuyos puntos de tangencia al triángulo dividen a sus lados en los ratios $i : j$, $j : k$ y $k : i$.

Otra generalización debida a Parish (2006) es para n -gonos: algunos n -gonos tienen admiten una elipse inscrita que sea tangente a cada lado en el punto medio. El teorema de Marden todavía es aplicable: los focos de esta elipse tangente en los puntos medios son ceros del polinomio derivado cuyos ceros son los vértices del n -gono.

Marden (1945, 1966) atribuye lo que se llama teorema de Marden a Siebeck (1864) y cita nueve artículos que incluían una versión del teorema. Dan Kalman ganó en 2009 el galardón Lester R. Ford de la *Mathematical Association of America* por su artículo de 2008 en el *American Mathematical Monthly* que describía el teorema.



Referencias

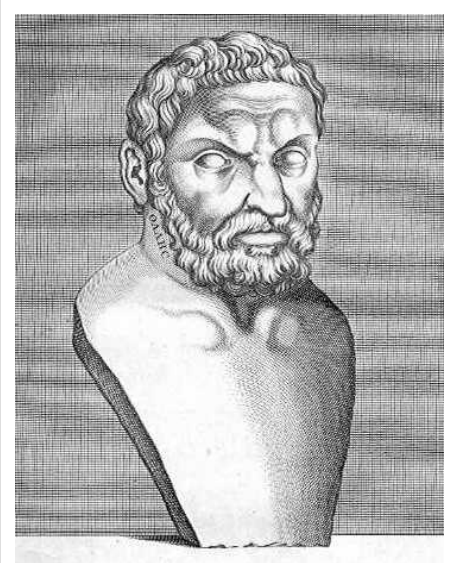
[1] Kalman, 2008

Bibliografía

- Kalman, Dan (2008a), « An Elementary Proof of Marden's Theorem (<http://mathdl.maa.org/mathDL/22/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=3338&pf=1>)», *The American Mathematical Monthly* **115**: 330–338, ISSN 0002-9890 (<http://worldcat.org/issn/0002-9890>)
- Kalman, Dan (2008b), « The Most Marvelous Theorem in Mathematics (<http://mathdl.maa.org/mathDL/4/?pa=content&sa=viewDocument&nodeId=1663>)», *Journal of Online Mathematics and its Applications* (<http://mathdl.maa.org/mathDL/4/>)
- Linfield, B. Z. (1920), «On the relation of the roots and poles of a rational function to the roots of its derivative», *Bulletin of the American Mathematical Society* **27**: 17–21, doi: 10.1090/S0002-9904-1920-03350-1 (<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1920-03350-1>).
- Marden, Morris (1945), « A note on the zeroes of the sections of a partial fraction (<http://www.ams.org/bull/1945-51-12/S0002-9904-1945-08470-5/home.html>)», *Bulletin of the American Mathematical Society* **51** (12): 935–940, doi: 10.1090/S0002-9904-1945-08470-5 (<http://dx.doi.org/10.1090/S0002-9904-1945-08470-5>)
- Marden, Morris (1966), *Geometry of Polynomials*, Mathematical Surveys, 3, Providence, R.I.: American Mathematical Society
- Parish (2006), « On the derivative of a vertex polynomial (<http://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200633.pdf>)», *Forum Geometricorum* **6**: 285–288: Proposition 5
- Siebeck, Jörg (1864), « Über eine neue analytische Behandlungsweise der Brennpunkte (<http://gdz.sub.uni-goettingen.de/dms/load/img/?PPN=GDZPPN002152495>)», *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **64**: 175–182, ISSN 0075-4102 (<http://worldcat.org/issn/0075-4102>)

Teorema de Tales

Existen dos teoremas en relación a la geometría clásica que reciben el nombre de **teorema de Tales**, ambos atribuidos al matemático griego Tales de Mileto en el siglo VI a. C.



Tales de Mileto.

Los dos teoremas de Tales

El primero de ellos explica esencialmente una forma de construir un triángulo semejante a uno previamente existente ("los triángulos semejantes son los que tienen iguales ángulos"). Mientras que el segundo desentraña una propiedad esencial de los circuncentros de todos los triángulos rectángulos ("encontrándose éstos en el punto medio de su hipotenusa"), que a su vez en la construcción geométrica es ampliamente utilizado para imponer condiciones de construcción de ángulos rectos. Si tres o más rectas paralelas son intersecadas cada una por dos transversales, los segmentos de las transversales determinados por las paralelas, son proporcionales.



Semicírculo que ilustra un teorema de Tales.

Primer teorema

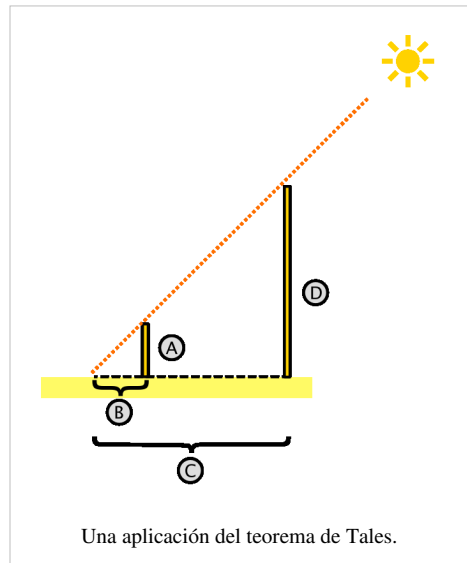
Como definición previa al enunciado del teorema, es necesario establecer que dos triángulos son semejantes si tienen los ángulos correspondientes iguales y sus lados son proporcionales entre sí. El primer teorema de Tales recoge uno de los resultados más básicos de la geometría, al saber, que:

Teorema primero

Si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes.

Tales de Mileto

Según parece, Tales descubrió el teorema mientras investigaba la condición de paralelismo entre dos rectas. De hecho, el primer teorema de Tales puede enunciarse como que la igualdad de los cocientes de los lados de dos triángulos no es condición suficiente de paralelismo. Sin embargo, la principal aplicación del teorema, y la razón de su fama, se deriva del establecimiento de la condición de semejanza de triángulos, a raíz de la cual se obtiene el siguiente corolario.



Corolario

Del establecimiento de la existencia de una relación de semejanza entre ambos triángulos se deduce la necesaria proporcionalidad entre sus lados. Ello significa que la razón entre la longitud de dos de ellos en un triángulo se mantiene constante en el otro.

Por ejemplo, en la figura se observan dos triángulos que, en virtud del teorema de Tales, son semejantes. Entonces, del mismo se deduce a modo de corolario que el cociente entre los lados A y B del triángulo pequeño es el mismo que el cociente entre los lados D y C en el triángulo grande. Esto es, que como por el teorema de Tales ambos triángulos son semejantes, se cumple que:

$$\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$$

Este corolario es la base de la geometría descriptiva. Su utilidad es evidente; según Heródoto, el propio Tales empleó el corolario de su teorema para medir la altura de la pirámide de Keops en Egipto. En cualquier caso, el teorema demuestra la semejanza entre dos triángulos, no la constancia del cociente.

Del primer teorema de Tales se deduce además lo siguiente (realmente es otra variante de dicho teorema, y, a su vez, consecuencia del mismo): *Si las rectas A, B, C son paralelas y cortan a otras dos rectas R y S, entonces los segmentos que determinan en ellas son proporcionales.*

Una aplicación inmediata de este teorema sería la división de un segmento en partes iguales, o en partes proporcionales a números dados (con ayuda de compás, regla y escuadra o cartabón).

Segundo teorema

El segundo teorema de Tales de Mileto es un teorema de geometría particularmente enfocado a los triángulos rectángulos, las circunferencias y los ángulos inscritos, consiste en el siguiente enunciado:

Teorema segundo

Sea **B** un punto de la circunferencia de diámetro **AC**, distinto de **A** y de **C**. Entonces el triángulo **ABC**, es un triángulo rectángulo.

Tales de Mileto

Este teorema (véase *fig 2.1* y *2.2*), es un caso particular de una propiedad de los puntos cocíclicos y de la aplicación de los ángulos inscritos dentro de una circunferencia.

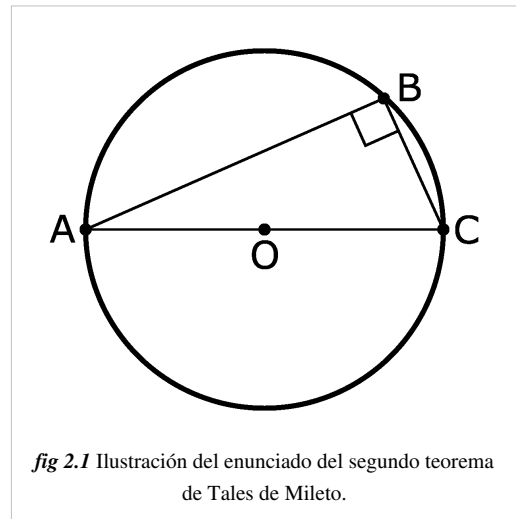


fig 2.1 Ilustración del enunciado del segundo teorema de Tales de Mileto.

Demostración

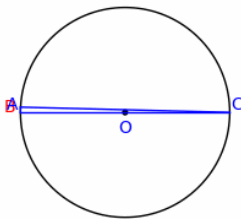


fig 2.2 Siempre que **AC** sea un diámetro, el ángulo **B** será constante y recto.

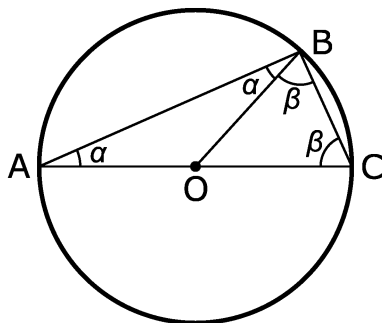


fig 2.3 Los triángulos **AOB** y **BOC** son isósceles.

En la circunferencia de centro **O** y radio **r** (véase *fig 2.3*), los segmentos

OA , **OB** y **OC**

son iguales por ser todos radios de la misma circunferencia.

Por lo tanto los triángulos **AOB** y **BOC** son isósceles.

La suma de los ángulos del triángulo **ABC** es:

$$2\alpha + 2\beta = \pi = 180^\circ$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación anterior por dos, se obtiene:

$$\widehat{ABC} = \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

Con la expresión anterior el segundo teorema queda demostrado.

Corolarios

(**Corolario 1**) “En todo triángulo rectángulo la longitud de la mediana correspondiente a la hipotenusa es siempre $\frac{1}{2}$ de la hipotenusa.”

Ya que aplicando el teorema anterior, se sabe que para cualquier posición que adopte el vértice **B** vale la igualdad, $OA = OB = OC = r$, donde **OB** es la mediana de la hipotenusa, (véase **fig 2.3**).

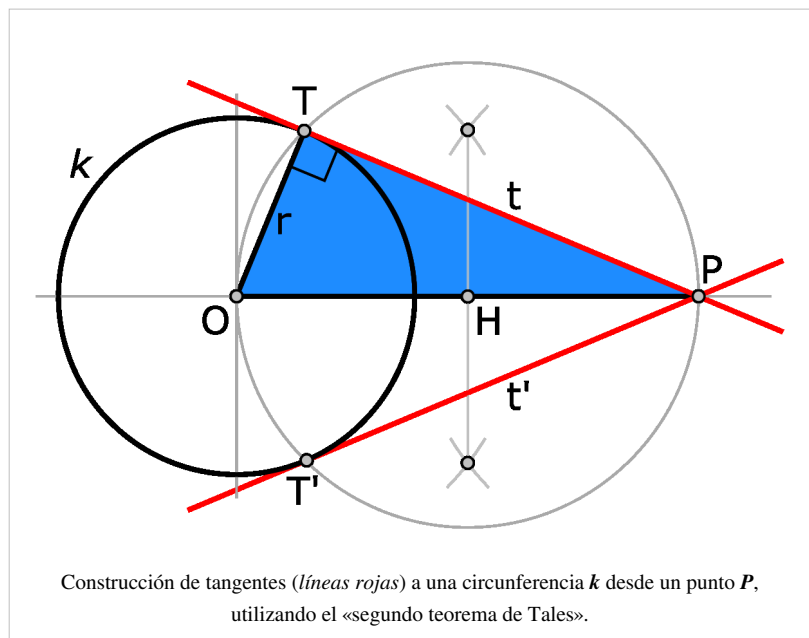
(**Corolario 2**) “La circunferencia circunscrita a todo triángulo rectángulo siempre tiene radio igual a $\frac{1}{2}$ de la hipotenusa y su circuncentro se ubicará en el punto medio de la misma.”

El corolario 2 también surge de aplicar el teorema anterior, para una comprensión intuitiva basta observar la **fig 2.2**.

Aplicación (Tales - teorema segundo)

El “segundo teorema” (de Tales de Mileto) puede ser aplicado para trazar las tangentes a una circunferencia k dada, que además pasen por un punto P conocido y externo a la misma (véase figura).

Se supondrá que una tangente cualquiera t (por ahora desconocida) toca a la circunferencia k en un punto T (también desconocido por ahora). Se sabe por simetría que cualquier radio r de la circunferencia k es perpendicular a la tangente del punto T que dicho radio define en la misma, por lo que concluimos que ángulo OTP es necesariamente recto.



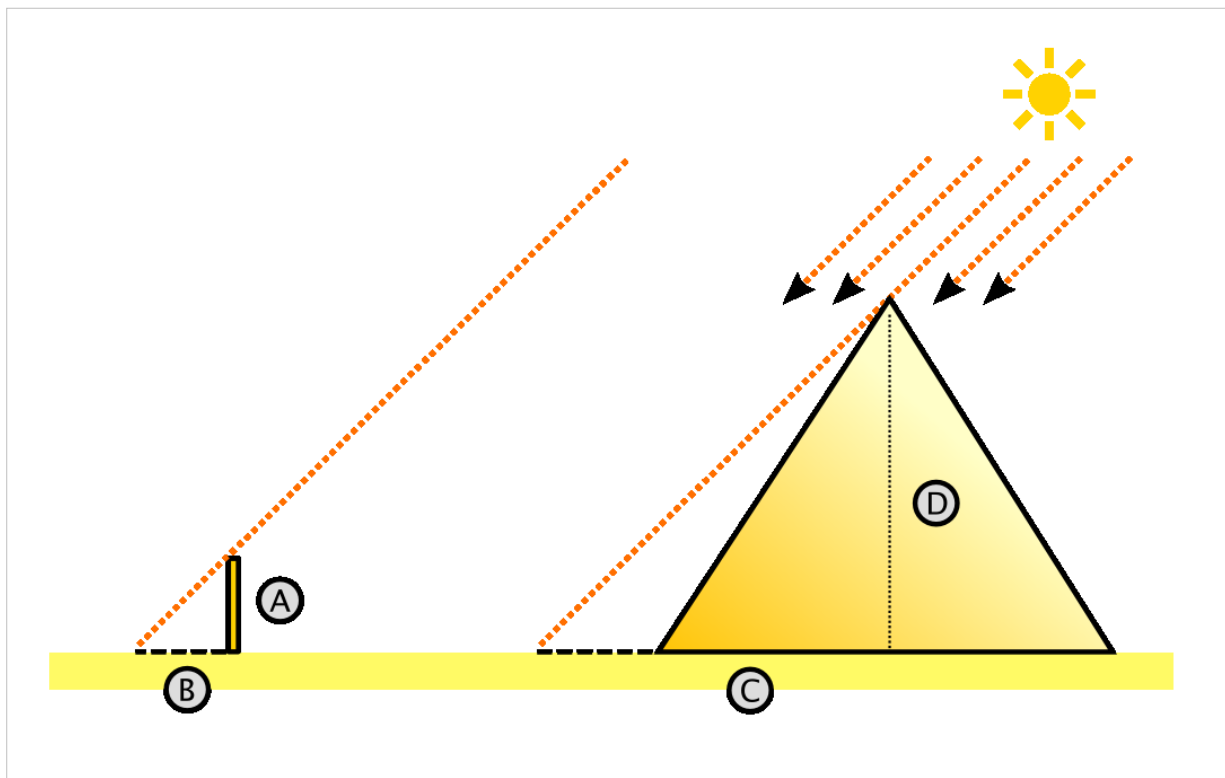
Lo anterior implica que el triángulo OTP es rectángulo. Recordando el «corolario 2 del teorema segundo de Tales» podemos deducir que entonces el triángulo OTP es inscribible en una circunferencia de radio $\frac{1}{2}$ de la hipotenusa OP del mismo.

Entonces marcando el punto H como punto medio de la hipotenusa OP y haciendo centro en el mismo, podemos dibujar una segunda circunferencia auxiliar (gris en la figura) que será la que circunscribe al triángulo OTP .

Esta última circunferencia trazada se intersecará con la circunferencia k en dos puntos T y T' , estos son justamente los puntos de tangencia de las dos rectas que son simultáneamente tangentes a k y además pasan por el punto P , ahora ya conocidos los puntos T y T' solo basta trazar las rectas TP y $T'P$ (rojas en la figura) para tener resuelto el problema.

Leyenda

Según la leyenda (relatada por Plutarco^[1]), Tales de Mileto en un viaje a Egipto, visitó las pirámides de Guiza (conocidas como Keops, Kefrén y Micerino), construidas varios siglos antes. Admirado ante tan portentosos monumentos de esta civilización, quiso saber su altura. De acuerdo a la leyenda, trató este problema con semejanza de triángulos (y bajo la suposición de que los rayos solares incidentes eran paralelos), pudo establecer una relación de semejanza (**teorema primero de Tales**) entre dos triángulos rectángulos, por un lado el que tiene por catetos (**C** y **D**) a la longitud de la sombra de la pirámide (conocible) y la longitud de su altura (desconocida), y por otro lado, valiéndose de una vara (clavada en el suelo de modo perfectamente vertical) cuyos catetos conocidos (**A** y **B**) son, la longitud de la vara y la longitud de su sombra. Realizando las mediciones en una hora del día en que la sombra de la vara sea perpendicular a la base de la cara desde la cual medía la sombra de la pirámide y agregando a su sombra la mitad de la longitud de una de las caras, obtenía la longitud total **C** de la sombra de la pirámide hasta el centro de la misma.



Como en triángulos semejantes, se cumple que $\frac{A}{B} = \frac{D}{C}$, por lo tanto la altura de la pirámide es $D = \frac{AC}{B}$, con lo cual resolvió el problema.

En la cultura popular

El grupo humorístico-musical argentino Les Luthiers compuso el tema "Teorema de Tales", incluido en el disco Sonamos, pese a todo. En dicho tema se enuncia el teorema en su totalidad, junto con su hipótesis.

Notas y referencias

[1] *Convivio dei Sette Sapienti* (2, 147 A)

Enlaces externos

- Schreiber. Michael. «Thales' Theorem (<http://demonstrations.wolfram.com/ThalesTheorem/>)» (en inglés). *The Wolfram Demonstrations Project*. Wolfram Research.
- Weisstein, Eric W. «Thales' Theorem (<http://mathworld.wolfram.com/ThalesTheorem.html>)» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.
- Munching on Inscribed Angles (<http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/Munching/inscribed.shtml>)
- Thales' theorem explained (<http://www.mathopenref.com/thalestheorem.html>) With interactive animation
- Aplicaciones del Teorema de Tales (http://portales.educared.net/wikiEducared/index.php?title=Aplicaciones_del_teorema_de_Tales)

Teorema de Taniyama-Shimura

La **conjetura de Taniyama-Shimura** es una conjetura muy importante dentro de las matemáticas modernas, que conecta las curvas elípticas definidas sobre el *Shimura-Weil*.^[1] En 1995, Andrew Wiles y Richard Taylor probaron un caso especial de la conjetura, suficiente para demostrar el último teorema de Fermat. En 2001 fue finalmente demostrada por Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond y Richard Taylor. Desde entonces, la conjetura de Taniyama-Shimura se conoce como el **teorema de Taniyama-Shimura** o **teorema de la modularidad**.

Enunciado

Se conoce como curva elíptica a aquella descrita con una ecuación del tipo

$$y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$$

tal que el discriminante del polinomio en el lado derecho de la ecuación no es 0. Supongamos que *A*, *B*, *C* y *D* son números racionales.

Una forma modular es una función analítica $f:H \rightarrow C$ del semiplano superior $H = \{x+iy: y>0\}$ a los complejos *C*, tal que *f* satisfaga ciertas condiciones de simetría (entre ellas $f(x) = f(x+N)$ para todo *x* y algún entero *N* fijo) y una condición de crecimiento (holomorficidad en el punto en el infinito).

El teorema afirma lo siguiente:

Para toda curva elíptica *E* con coeficientes racionales existe una forma modular *f* (de peso 2) tal que la serie *L* asociada a *E* y la serie *L* asociada a *f* coinciden. Esto equivale a que los coeficientes *a_p* asociados a la curva *E* (que se obtienen a partir del número de puntos de la curva módulo *p*, para *p* primo de buena reducción de *E*) coinciden con los coeficientes del desarrollo de Fourier en el infinito de *f*.

Andrew Wiles (90's)

Historia

Los trabajos de Andrew Wiles para obtener la demostración del último teorema de Fermat llevaron a la demostración de la veracidad de la conjetura de Taniyama-Shimura para el caso semiestable (asistido por Richard Taylor), partiendo de la teoría de Deformaciones de Representaciones de Galois creada por B. Mazur y de resultados de Langlands y Tunnell y desarrollando lo que hoy se conocen como Teoremas de Levantamiento Modular 1995.^[2] Posteriormente, Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond y Richard Taylor ampliaron el campo de aplicación desde las curvas elípticas semiestables definidas sobre los racionales a todas las curvas elípticas definidas sobre los racionales.^[3] Hay duda sobre el aporte de Andrew Wiles; Serge Lang reivindicó a Shimura la paternidad junto con Taniyama. Éste se suicidó a los 31 años en 1958, murió igual que Abel.

Citas

- [2] Wiles, Andrew *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem*. ([http://links.jstor.org/sici?sici=0003-486X\(199505\)2:141:3<443:MECAFL>2.0.CO;2-Y](http://links.jstor.org/sici?sici=0003-486X(199505)2:141:3<443:MECAFL>2.0.CO;2-Y)) Ann. of Math. (2) 141 (1995), no. 3, 443--551
- [3] Christophe Breuil, Brian Conrad, Fred Diamond, Richard Taylor: *On the modularity of elliptic curves over \mathbb{Q} : Wild 3-adic exercises* (<http://www.ams.org/jams/2001-14-04/S0894-0347-01-00370-8/S0894-0347-01-00370-8.pdf>), Journal of the American Mathematical Society 14 (2001), pp. 843–939. Contains the proof of the modularity theorem

Referencias

- Singh, Simon (2007). « 5. Prueba por contradicción (<http://books.google.es/books?id=xzLnPAAACAAJ>) ». *El enigma de Fermat* (Segunda edición). Editorial Planeta. ISBN 9788408046790.
- Aczel, Amir D.: *El último teorema de Fermat*, Fondo de cultura económica, México, publicado año 2003.

Teorema de Varignon

El **Teorema de Varignon** es un resultado de geometría euclidiana debido a Pierre Varignon, publicado en 1731, y que establece:

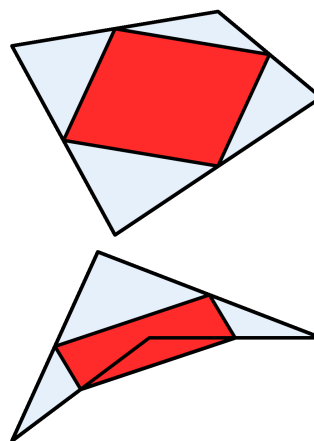
En cualquier cuadrilátero, los puntos medios de los lados forman un paralelogramo cuya área es la mitad de la del cuadrilátero original

Al paralelogramo descrito en el teorema se le conoce como **paralelogramo de Varignon**.

Demostración

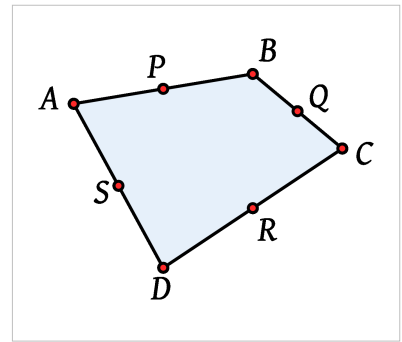
La demostración del teorema en el caso de un cuadrilátero convexo procede de la siguiente manera:

Teorema de Varignon

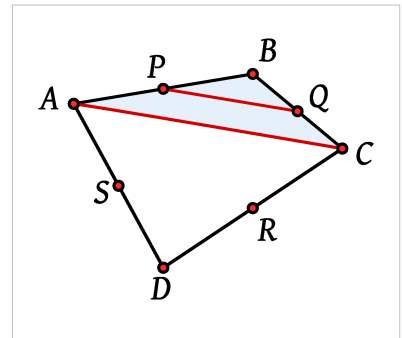


Los puntos medios de cualquier cuadrilátero forman un paralelogramo.

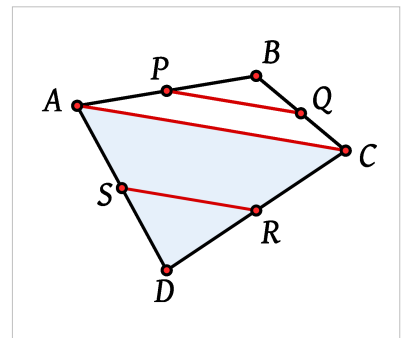
Sean A, B, C, D los vértices del cuadrilátero y P, Q, R, S , como indica la figura.



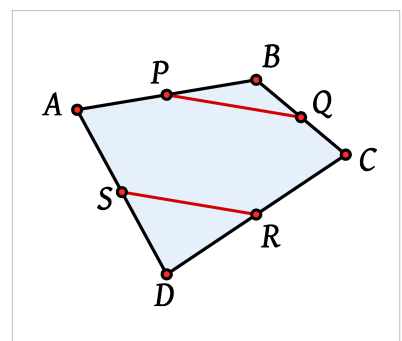
Obsérvese que P, Q son puntos medios de dos lados del triángulo ABC y, por una consecuencia del teorema de Tales, PQ es paralela a la línea AC .



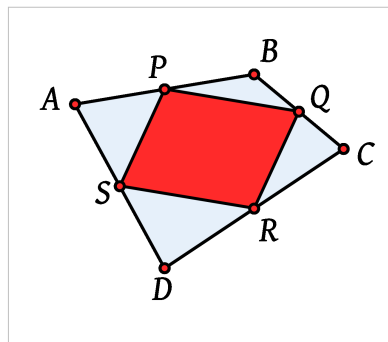
De manera similar, R, S son puntos medios de dos lados del triángulo CDA y al igual que arriba, RS es una línea paralela a la línea CA .



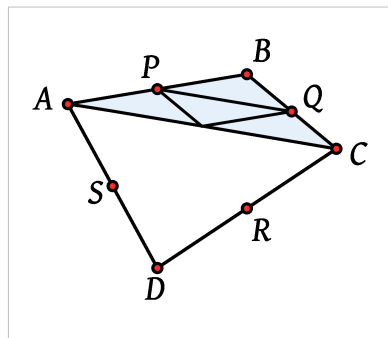
Pero si tanto PQ como RS son paralelas a AC , entonces son paralelas entre sí. Es decir, PQ es paralela a RS .



Un argumento similar demuestra que tanto PS como QR son paralelas a la línea BD y por tanto paralelas entre sí. Pero entonces se ha demostrado que los lados opuestos del cuadrilátero $PQRS$ son paralelos y por tanto éste debe ser un cuadrilátero.



En relación a las áreas, hay que observar que el área del triángulo BPQ es la cuarta parte del área del triángulo ABC . De manera similar, el triángulo SRD tiene la cuarta parte del área del triángulo ACD . Por tanto, la suma de las áreas de los triángulos BPQ y SRD es un cuarto del área del cuadrilátero.



Pero de manera similar, las áreas de los triángulos APS y QCR suman un cuarto del área del cuadrilátero. Esto quiere decir que si sumamos las cuatro áreas BPQ , CQR , RSD y PSA obtendremos la mitad del área del cuadrilátero y por tanto, el área del paralelogramo de Varignon debe ser exactamente igual a la mitad del área restante.

La prueba anterior puede adaptarse sin mayor problema al caso en que el cuadrilátero es cóncavo, terminando así la prueba.

Paralelogramo de Varignon

Adicionalmente a tener un área igual a la mitad del cuadrilátero asociado, el paralelogramo de Varignon satisface otras propiedades.

- El perímetro del paralelogramo de Varignon es igual a la suma de las longitudes de las diagonales.
- El paralelogramo de Varignon es un rombo si y sólo si las diagonales del cuadrilátero tienen la misma longitud.
- El paralelogramo de Varignon es un rectángulo si y sólo si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares.

Como consecuencia:

- El paralelogramo de Varignon es un cuadrado si y sólo si las diagonales del cuadrilátero son perpendiculares y tienen la misma longitud.

Generalizaciones

Una forma de generalizar el teorema de Varignon es considerar polígonos de más de cuatro lados. Desafortunadamente, el polígono obtenido al unir los puntos medios de un polígono (denominado polígono derivado) no tendrá usualmente lados paralelos ni iguales. Sin embargo:

Si un polígono con $2n$ lados y vértices A_1, A_2, \dots, A_n satisface que $A_i A_{i+1}$ es paralelo e igual a $A_{i+n} A_{i+n+2}$ (para $1 \leq i \leq n$) y si B_j es el punto medio del lado $B_j B_{j+1}$ entonces el polígono $B_1 B_2 \dots B_{2n}$ tiene lados opuestos paralelos e iguales.

El teorema también se puede generalizar a cuadriláteros que no sean planos (por ejemplo, en el espacio o en dimensiones mayores), y aunque es posible modificar la prueba euclidiana para el caso espacial, se puede dar una demostración vectorial para cubrir el caso de dimensiones mayores.

Finalmente, considerando un octaedro como una generalización de cuadriláteros al espacio, y tomando los centroides de las caras como equivalentes a los puntos medios de los lados, es posible demostrar que los centroides de las ocho

caras forman siempre un paralelogramo.

Bibliografía

- Coxeter, H.S.M.; Greitzer, S.L. (1993). *Retorno a la geometría [Geometry Revisited]*. La Tortuga de Aquiles. 1. Mathematical Association of America. p. 53. ISBN 8460487261.

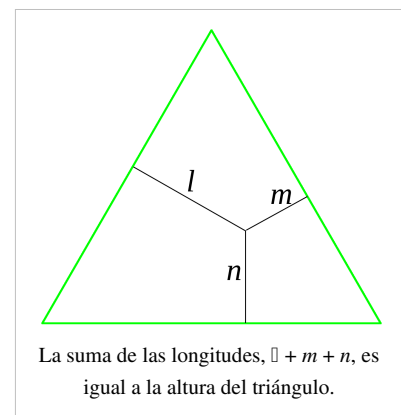
Ver también

- Paralelogramo
- Polígono de puntos medios

Teorema de Viviani

El **teorema de Viviani**, llamado así en honor de Vincenzo Viviani, enuncia que la suma de las distancias desde un punto a cada uno de los lados de un triángulo equilátero es igual a la altura del triángulo.

El teorema se puede extender a polígonos equiláteros y polígonos equiangulares. Específicamente, la suma de las distancias desde un punto hasta los lados de un polígono equilátero o equiangular no depende del punto.^[1]



Demostración

Este teorema se puede demostrar fácilmente comparando áreas de triángulos.

Sea ABC un triángulo equilátero donde h es la altura y s la longitud de cada lado. P es un punto arbitrario en el interior del triángulo, y l , m , n son las distancias entre P y cada uno de los lados. Entonces el área de ABC es

$$S(ABC) = S(ABP) + S(ACP) + S(BCP),$$

$$\frac{sh}{2} = \frac{sl}{2} + \frac{sm}{2} + \frac{sn}{2},$$

$$h = l + m + n$$

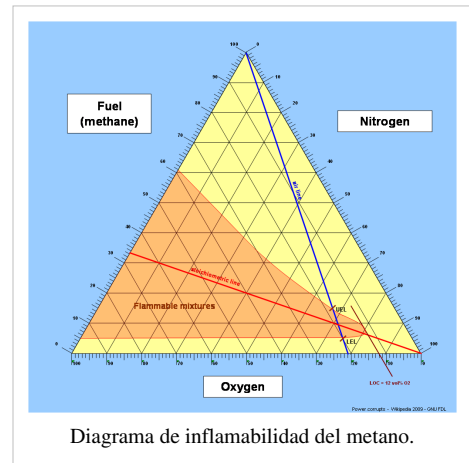
que es lo que se buscaba.

Aplicaciones

Gracias al teorema de Viviani, se pueden utilizar rectas paralelas a los lados de un triángulo equilátero para dar coordenadas para diagramas ternarios tales como los diagramas de inflamabilidad. De forma más general, se pueden utilizar coordenadas en un simplex regular de la misma manera.

Referencias

- [1] Elias Abboud "On Viviani's Theorem and its Extensions" (http://arxiv.org/PS_cache/arxiv/pdf/0903/0903.0753v3.pdf) pp. 2, 11 (en inglés)
- Weisstein, Eric W. « Viviani's Theorem (<http://mathworld.wolfram.com/VivianisTheorem.html>)» (en inglés). *MathWorld*. Wolfram Research.



Enlaces externos

- Viviani's Theorem: What is it? (<http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Viviani.shtml>) en Cut the knot, en inglés.
- Viviani's Theorem (<http://demonstrations.wolfram.com/VivianisTheorem/>) por Jay Warendorff (Wolfram Demonstrations Project), en inglés.

Teorema de Lambert

El **teorema de Lambert** sobre órbitas elípticas figura en una de las obras del matemático alsaciano que le da nombre, Jean-Henri Lambert, *Insigniores orbitae cometarum proprietates* publicada en Ausburgo en 1761.

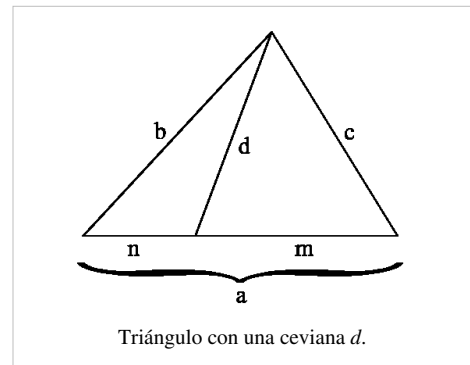
Sirvió de fundamento al método de Heinrich Olbers (1758-1840) para el cálculo de órbitas y se formula de la manera siguiente: «En las órbitas parabólicas el tiempo empleado para el recorrido de un arco depende solo de la cuerda y de la suma de los radios vectores correspondientes a sus extremos, es decir, que la circunferencia circunscrita al triángulo que definen tres tangentes a una parábola pasa por el foco de la misma.

Ceviana

Ceviana es un segmento de recta que une un vértice de un triángulo con el lado opuesto a este. También se la conoce como **transversal angular**.

Se puede decir que la mediana, la altura y la bisectriz son cevianas o rectas notables de un triángulo.

El nombre de ceviana fue introducido por M.A. Poulain, que lo introdujo en honor de Giovanni Ceva, quien en 1678 había formulado el teorema que lleva su nombre, Teorema de Ceva publicándolo en su artículo *De lineis rectis se invicem secantibus statica constructio*. Este teorema da la condición necesaria y suficiente para que tres cevianas se corten en un punto.^[1]



Referencias

[1] Teorema de Ceva (http://www.dmae.upct.es/~pepemar/triangulo/teorema_ceva.html)

Teorema de Pascal

En el ámbito de la geometría proyectiva, el **teorema de Pascal** (también denominado **Hexagrammum Mysticum Theorem**) establece que si un hexágono arbitrario se encuentra inscrito en alguna sección cónica, y se extienden los pares opuestos de lados hasta que se cruzan, los tres puntos en los que se intersecan se encontrarán ubicados sobre una línea recta, denominada la **línea de Pascal** de esta configuración.

Este teorema es una generalización del Teorema del hexágono de Pappus, y del dual proyectivo del teorema de Brianchon. Fue descubierto por Blaise Pascal en 1639 cuando tenía la edad de dieciséis años.

El teorema fue generalizado por Möbius en 1847, en la siguiente forma: si un polígono con $4n + 2$ lados se encuentra inscrito en una sección cónica, y se prolongan los pares de lados opuestos hasta que se intersecan en $2n + 1$ puntos. Entonces si $2n$ puntos se encuentran sobre una línea común, el punto remanente también se encontrará ubicado sobre dicha línea.

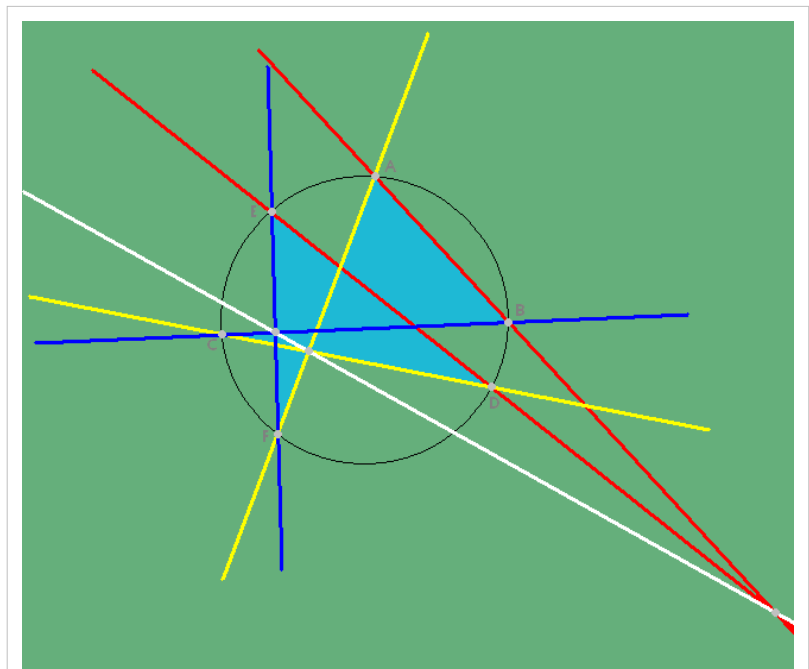


Figura 1. El hexágono irregular ABCDEF se encuentra inscrito en un círculo. Sus lados se extienden de forma tal que los pares de lados opuestos se intersecan en la línea de Pascal. Cada par de lados opuestos prolongados tiene un color propio: rojo, amarillo y azul. La línea de Pascal se encuentra indicada con color blanco.

Referencias

- Guggenheimer, Heinrich W. (1967), *Plane geometry and its groups*, San Francisco, Calif.: Holden-Day Inc., MR 0213943 ^[1]
- van Yzeren, Jan (1993), «A simple proof of Pascal's hexagon theorem ^[2]», *The American Mathematical Monthly* **100** (10): 930–931, MR 1252929 ^[3], ISSN 0002-9890 ^[4]

Enlaces externos

- Demostración interactiva del teorema de Pascal (requiere Java) ^[5] en cut-the-knot
- 60 Pascal Lines (Java required) ^[6] at cut-the-knot

Referencias

- [1] <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=0213943>
- [2] <http://www.jstor.org/stable/2324214>
- [3] <http://www.ams.org/mathscinet-getitem?mr=1252929>
- [4] <http://worldcat.org/issn/0002-9890>
- [5] <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/Pascal.shtml>
- [6] <http://www.cut-the-knot.org/Curriculum/Geometry/PascalLines.shtml>
-

Fuentes y contribuyentes del artículo

Teorema de Barbier *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542100> *Contribuyentes:* Egaída, Ezarate, Gusbelluwiki, Juan Mayordomo, Tronch

Teorema de De Gua *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542211> *Contribuyentes:* Davius, Gsrzdl, HeMaCh, Juan Mayordomo, 1 ediciones anónimas

Teorema de Desargues *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542219> *Contribuyentes:* Albertocai, Alfredobi, Belgrano, El Moska, Farisori, Gafotas, Ganímedes, GermanX, Gusbelluwiki, JMCC1, Jtíco, Ortisa, Poco a poco, Rondador, Sabbut, Txebixev, Àlex, 8 ediciones anónimas

Teorema de rotación de Euler *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65297299> *Contribuyentes:* Ggenellina, Grillitus, Joseaperez, Juan Mayordomo, Juansempere, Txungo, 1 ediciones anónimas

Teorema de Jung *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542359> *Contribuyentes:* Davius

Teorema de Apolonio *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542083> *Contribuyentes:* Gusbelluwiki, Sabbut

Teorema de Menelao *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65311096> *Contribuyentes:* Davius, Götz, Juan Mayordomo, 4 ediciones anónimas

Teorema de Mohr-Mascheroni *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542494> *Contribuyentes:* Alfredobi, Davius, Juan Mayordomo

Teorema de Morley *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542498> *Contribuyentes:* Hagman, Juan Mayordomo, Sabbut

Teorema de Napoleón *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65437563> *Contribuyentes:* Davius, Jerowiki

Teorema de Ptolomeo *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65146221> *Contribuyentes:* Alfredobi, Daniel VV, Fddiego, Gusbelluwiki, Götz, Homo logos, JMCC1, Javierito92, Jerowiki, Jtíco, Juan Mayordomo, Magister Mathematicae, Rastrojo, Sebrev, 14 ediciones anónimas

Teorema de Poncelet–Steiner *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542539> *Contribuyentes:* Alfredobi, Banfield, Juan Mayordomo, Spirit-Black-Wikipedista, 2 ediciones anónimas

Método exhaustivo *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64990858> *Contribuyentes:* Akhram, Amarill0, Arcibel, Davius, Egaída, FAL56, GermanX, Isha, JMCC1, Jkbw, Juliwolfgang, LTB, Miss Manzana, Nuvem, OiramZ, Rosarinagazo, Rosarino, TMU, Txus.aparicio, UA31, 16 ediciones anónimas

Sangaku *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64760046> *Contribuyentes:* Dorieo, Gugsu, Jerowiki, Juan Mayordomo, Loveless, Magister Mathematicae, Omar35880, Rovnet, おはぐろ鯖鯨, 11 ediciones anónimas

Trilateración *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65168816> *Contribuyentes:* Dalton2, Gdghadqsn, Leonpolanco, Mercenario97, Raulsch, 6 ediciones anónimas

Diagrama de Schlegel *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65396031> *Contribuyentes:* Aliuk, Davius

Teorema de Casey *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542159> *Contribuyentes:* Götz, Jerowiki, Rovnet, 2 ediciones anónimas

Teorema de Brahmagupta *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65321512> *Contribuyentes:* Jerowiki, Magister Mathematicae

Teorema de la bisectriz *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542808> *Contribuyentes:* Alfredobi, CommonsDelinker, Davius, Farisori, Fayervirus, Grillitus, Gusbelluwiki, Götz, JMCC1, Matdrodes, Nabadvin, Nicop, Pólux, Rhernan, Tano4595, Technopat, Vitamine, Wikiléptico, 17 ediciones anónimas

Teorema de Pick *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542535> *Contribuyentes:* Alfredobi, Gato ocioso, Gejotape, GermanX, Jesús Pardillo, Luckas Blade, Magister Mathematicae, Sabbut, 7 ediciones anónimas

Teorema del centroide de Pappus *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542973> *Contribuyentes:* AlbertoCrakito, Alfredobi, Belgrano, Cinabrium, Comae, Davius, Diegusjaimes, Farisori, Feuerfluss, Gafotas, Gengiskanhg, JMCC1, Kizar, Marzini, Mel 23, Snakefang, 22 ediciones anónimas

Teorema del hexágono de Pappus *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542982> *Contribuyentes:* Aleator, Alfredobi, Belgrano, Farisori, Gafotas, GermanX, Magister Mathematicae, Maldoror, Oblongo, Resped, Ssola, 2 ediciones anónimas

Teorema de Routh *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542576> *Contribuyentes:* Gusbelluwiki

Semejanza (geometría) *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65484376> *Contribuyentes:* Acratta, Akhram, Alfredobi, Antur, Ascánder, Baiji, Balderai, Cheveri, DanielithoMoya, Danimube, David0811, Diegusjaimes, Dodo, Dorieo, Droog, Eduardosalg, Emiduronte, Er Komandante, Farisori, GermanX, Ginés90, Gurgut, Götz, Helmy oved, HiTe, Humberto, Isha, JMCC1, Javierito92, Jkbw, Jordi Burguet Castell, JorgePrendes, Juan Mayordomo, LarA, Larocka, Leonpolanco, M S, MadriCR, Magister Mathematicae, Matdrodes, Mushii, Napier, Nicop, Níxon, Piano99, Pino, Poom, Pólux, Ricardogpn, Rosarino, Sabbut, Sanbec, Savh, Sergio Andres Segovia, Steven91, SuperBraulio13, Taichi, Tano4595, Taragui, Taty2007, Technopat, Tirithel, Valentín estevanez navarro, Waka Waka, 253 ediciones anónimas

Sexteto de Soddy *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64813747> *Contribuyentes:* Jerowiki, Juan Mayordomo, Ralgis, Rovnet, Ttwo

Teorema de Steiner-Lehmus *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542611> *Contribuyentes:* Comikisimo, Davius, FAR

Teorema de Stewart *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542619> *Contribuyentes:* Gusbelluwiki, Götz, Helmy oved, Juan Mayordomo, 2 ediciones anónimas

Teorema de Brianchon *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64932370> *Contribuyentes:* Sabbut

Teorema de Carnot *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65554621> *Contribuyentes:* Jkbw, Juan Mayordomo, Magister Mathematicae, Rovnet, Sabbut, 3 ediciones anónimas

Teorema de Ceva *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65311056> *Contribuyentes:* Escarlati, Gusbelluwiki, Hhmb, Juan Mayordomo, Uruk, 1 ediciones anónimas

Teorema de la mariposa *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542875> *Contribuyentes:* King of Hearts, Magister Mathematicae

Teorema de los círculos de Descartes *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64661741> *Contribuyentes:* Farisori, Jerowiki, Jkbw, Juan Mayordomo, Rovnet, Tamorlan, Taramita, 4 ediciones anónimas

Teorema de Marden *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542453> *Contribuyentes:* Davius

Teorema de Tales *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=65489518> *Contribuyentes:* José, Sergio, 3coma14, Acratta, Addicted04, Akma72, Alemon281194, Alex28, Allforrous, Andreasimperu, Antonorsi, Antur, Açipni-Lovrij, Baiji, Balderai, Belgrano, BlackBeast, Bostan Serai, Bucephala, BuenaGente, C h a n-Wiki, Camilo, ChristianH, Cinabrium, Ctrl Z, Cuchulainn, Dangelin5, DayL6, Delphidius, Diegusjaimes, Dnu72, Dodo, Dr Juzam, Durero, Echani, Eduardosalg, Elsenyor, Engranaje, Er Komandante, Farisori, Fmariluis, Foundling, FrancoGG, Gaeddal, Gafotas, Gaius iulius caesar, Ggenellina, Gusbelluwiki, Gugsu, Götz, HUB, Halfdrag, Hector409a, Heliocrono, Helmy oved, Holeco, Hprmedina, Humberto, Ialad, Igna, Isha, JMCC1, Javierito92, Jcaraballo, Jirah, Jjafjaf, Jkbw, Jkevincl, JorgeGG, Jtíco, Juan Mayordomo, Julie, Khiari, Kititta, Knax, Komputisto, LMLM, LarA, Lasneyx, Laura Fiorucci, Leonpolanco, Lolero, Macarrones, Magister Mathematicae, Manolo felix, Manwë, MarcoAurelio, Marcuswargears, Martiko, Master of the beast, Matdrodes, Mcac12341234, Mel 23, Merloi, Metronomo, Miguelal84, Miguelcl7, Moriel, Mr.Ajedrez, Nachoseli, Neleya, Netito777, Oterin, Oxilium, Perryxxx, Petronas, Petrus, Pieter, Porao, Pólux, RGLago, Racso, Rastrojo, Ravave, Ricardogpn, Richy, Rikhardum, Robin Hood, Rolling Staff, Romero Schmidtke, Rosarinagazo, Rosarino, RoyFocker, Rubpe19, Rumpelstiltskin, Rrge, Sabbut, Saloca, Sanbec, Savh, Sessho-akat, Spirit-Black-Wikipedista, SuperBraulio13, Tatvs, Technopat, Tirithel, Travelour, Tupakarelloko, Txus.aparicio, UA31, Unknown person, Vic Fede, Virgi, Vitamine, Voytek s, Wachifest, Waka Waka, Williamgual11, Wipedia, 753 ediciones anónimas

Teorema de Taniyama-Shimura *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542636> *Contribuyentes:* Arctosouros, Belgrano, Davius, EOZyo, Farisori, GermanX, HrAd, Juan Mayordomo, Ricard Delgado Gonzalo, Rondador, Uruk, Veremos, 9 ediciones anónimas

Teorema de Varignon *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64780863> *Contribuyentes:* Gherm, Leonpolanco, Magister Mathematicae, 2 ediciones anónimas

Teorema de Viviani *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64542677> *Contribuyentes:* Magister Mathematicae, Metronomo, Sabbut

Teorema de Lambert *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=60912081> *Contribuyentes:* Davius, Nice on ice, 6 ediciones anónimas

Ceviana *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64923097> *Contribuyentes:* 333, Davius, Echani, Gafotas, Gusbelluwiki, Götz, Joraka, Resped, Sabbut, 6 ediciones anónimas

Teorema de Pascal *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?oldid=64888144> *Contribuyentes:* Juan Mayordomo, Juanda47845154, Kadellar, MercurioMT, Uruk, 5 ediciones anónimas

Fuentes de imagen, Licencias y contribuyentes

- Archivo:Construction triangle Reuleaux.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Construction_triangle_Reuleaux.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0,2.5,2.0,1.0 *Contribuyentes:* Frédéric MICHEL
- Archivo:De gua 1.jpg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:De_gua_1.jpg *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* User:Kmhkmh), Original uploader was Kmhkmh at en.wikipedia
- Archivo:De gua 2.jpg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:De_gua_2.jpg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* User:Kmhkmh), Original uploader was Kmhkmh at en.wikipedia
- Archivo:De gua 3.jpg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:De_gua_3.jpg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* User:Kmhkmh), Original uploader was Kmhkmh at en.wikipedia
- Imagen:Teorema de desargues.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_desargues.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Itico
- Imagen:Desteodem.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Desteodem.svg> *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Itico
- Archivo:Rotationtheorem.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Rotationtheorem.svg> *Licencia:* Creative Commons Attribution 3.0 *Contribuyentes:* Eulerangles.svg: Lionel Brits derivative work: Juansempere (talk)
- Archivo:Regular triangle 1.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Regular_triangle_1.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* D V S, Darapti
- Archivo:Apollonius' theorem Schema-001.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Apollonius'_theorem_Schema-001.svg *Licencia:* Creative Commons Zero *Contribuyentes:* Gusbelluwiki
- Archivo:TriangleABCMedianC-ColorGreen-01.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:TriangleABCMedianC-ColorGreen-01.svg> *Licencia:* Creative Commons Zero *Contribuyentes:* Gusbelluwiki
- Archivo:Triangle3Medians3ColRGB-01.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Triangle3Medians3ColRGB-01.svg> *Licencia:* Creative Commons Zero *Contribuyentes:* Gusbelluwiki
- Archivo:Menelaos's theorem 1.png** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Menelaos's_theorem_1.png *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Joolz, Krishnavedala, Stan Shebs, Thuresson, Tosha, WojciechSwiderski, 1 ediciones anónimas
- Archivo:Morley triangle.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Morley_triangle.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* Morley_triangle.png: Dbenbenn derivative work: Hagman (talk)
- Archivo:Napoleon's theorem.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Napoleon's_theorem.svg *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Anarkman, Darapti, Gmaxwell, King of Hearts
- Archivo:Ptolemy Theorem.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Ptolemy_Theorem.svg *Licencia:* Public domain *Contribuyentes:* Dicklyon (talk)
- Archivo:Ptolemy's theorem.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Ptolemy's_theorem.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* Darapti, EnEdC, Newone, Rimshot
- Image:Ptolemy Pentagon.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Ptolemy_Pentagon.svg *Licencia:* Public domain *Contribuyentes:* AnonMoos, Athaenara, JMCC1, Stotr
- Archivo:Archimedes pi.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Archimedes_pi.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* Leszek Krupinski
- Archivo:Sangaku at Enmanji.jpg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sangaku_at_Enmanji.jpg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0,2.5,2.0,1.0 *Contribuyentes:* Misakubo
- Archivo:Sangaku of Soddy's hexlet in Samukawa Shrine.jpg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sangaku_of_Soddy's_hexlet_in_Samukawa_Shrine.jpg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0,2.5,2.0,1.0 *Contribuyentes:* Shikishima Ken-ichi (talk)
- Archivo:Higashi Honganji Honden.JPG** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Higashi_Honganji_Honden.JPG *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Haragayato, LordAmeth, Thuresson, Tsui, Urashimataro
- Archivo:Chinese pythagoras.jpg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Chinese_pythagoras.jpg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Avsa, Brews ohare, Christopher.Madsen, Dmcq, Pixeltoo, 5 ediciones anónimas
- Archivo:Sangaku-3c1t.png** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sangaku-3c1t.png> *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* rovnet
- Archivo:Sangaku-3c.png** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sangaku-3c.png> *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* rovnet
- Archivo:Japanese-theorem-circles-radius.png** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Japanese-theorem-circles-radius.png> *Licencia:* Creative Commons Attribution 3.0 *Contribuyentes:* Rovnet
- Archivo:Japanese theorem 2.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Japanese_theorem_2.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution 3.0 *Contribuyentes:* Kmhkmh
- Archivo:Sabgaku-soddy.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sabgaku-soddy.svg> *Licencia:* Creative Commons Attribution 3.0 *Contribuyentes:* Rovnet
- Archivo:Sangaku-3c-res.png** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Sangaku-3c-res.png> *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Rovnet
- Archivo:Japanese-theorem-m1-m5.png** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Japanese-theorem-m1-m5.png> *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Rovnet
- Archivo:Commons-logo.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Commons-logo.svg> *Licencia:* logo *Contribuyentes:* SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.
- Image:Trilateration.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trilateration.svg> *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Rossi, Braindrain0000
- Image:Trilateración.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Trilateración.svg> *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:H A A
- Archivo:Polyhedral schlegel diagrams.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Polyhedral_schlegel_diagrams.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Traced by User:Stannered
- Archivo:Hypercube.svg** *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Hypercube.svg> *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* A.Savin, Goffrie, Herbythyme, Itai, Kilom691, Mate2code, Mouagip, Mysid, Opensofias, 7 ediciones anónimas
- Image:Dodecahedron schlegel diagram.png** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Dodecahedron_schlegel_diagram.png *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* David Eppstein
- Image:Schlegel wireframe 120-cell.png** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Schlegel_wireframe_120-cell.png *Licencia:* desconocido *Contribuyentes:* Original uploader was Tomruen at en.wikipedia
- Image:Theorem of casey2.png** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Theorem_of_casey2.png *Licencia:* Creative Commons Attribution 3.0 *Contribuyentes:* Kmhkmh
- Archivo:Brahmaguptra's theorem.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Brahmaguptra's_theorem.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* User:Jitse Niesen
- Archivo:Triangle ABC with bisector AD.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Triangle_ABC_with_bisector_AD.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Infrogmation, Kiensvay, Limaner, 1 ediciones anónimas
- Archivo:Bisector theorem2.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Bisector_theorem2.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* Patrol110
- Archivo:Teorema de Pick.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Pick.svg *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Drini
- Archivo:Teorema de Pappus.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Pappus.svg *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Drini
- Archivo:Routh theorem.svg** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Routh_theorem.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* Claudio Rocchini
- Archivo:triángulos semejantes.png** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Triángulos_semejantes.png *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Amada44, Czupirek, Rimshot, Yrithind
- Archivo:Triangulos semejantes 2.png** *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Triangulos_semejantes_2.png *Licencia:* Free Art License *Contribuyentes:* Original uploader was Laroeka at es.wikipedia

Archivo:triángulos semejantes sobre variedad.png *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Triángulos_semejantes_sobre_variedad.png *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Original uploader was Sauron at es.wikipedia

Archivo:triángulos semejantes sobre esfera.png *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Triángulos_semejantes_sobre_esfera.png *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Original uploader was Sauron at es.wikipedia

Archivo:Rotating hexlet equator opt.gif *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Rotating_hexlet_equator_opt.gif *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* WillowW

Archivo:Steiner lehmus.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Steiner_Lehmus.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution 3.0 *Contribuyentes:* Kmhkmh

Archivo:Stewarts thm.png *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Stewarts_thm.png *Licencia:* Attribution *Contribuyentes:* Original uploader was Miyomiyo1050 at en.wikipedia

Archivo:Brianchon's Theorem.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Brianchon's_Theorem.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Denisgomes, Rimshot, 1 ediciones anónimas

Archivo:Teorema de Carnot (sin rótulo).svg *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Carnot_\(sin_rótulo\).svg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Carnot_(sin_rótulo).svg) *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Drini (Pedro Sánchez)

Archivo:Teorema de Carnot - obtuso (sin rótulo).svg *Fuente:* [http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Carnot_-_obtus_\(sin_rótulo\).svg](http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Carnot_-_obtus_(sin_rótulo).svg) *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Drini (Pedro Sánchez)

Archivo:Ceva's theorem 1.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Ceva's_theorem_1.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* 4C

Archivo:Ceva's theorem 2.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Ceva's_theorem_2.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-ShareAlike 3.0 Unported *Contribuyentes:* 4C

File:Butterfly theorem.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Butterfly_theorem.svg *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Gustavb, HB

Archivo:Descartes Circles.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Descartes_Circles.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* Jiuguang Wang

Archivo:Marden theorem.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Marden_theorem.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution 3.0 *Contribuyentes:* Kmhkmh

Archivo:Thales.jpg *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Thales.jpg> *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Bibi Saint-Pol, Tomisti

Archivo:Thaleskreis.png *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Thaleskreis.png> *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Original uploader was Hubi at de.wikipedia

Archivo:Thales theorem 7.png *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Thales_theorem_7.png *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Amada44, Dake, HB, 1 ediciones anónimas

Archivo:Thales' Theorem Simple.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Thales'_Theorem_Simple.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Inductiveload

Archivo:Animated illustration of thales theorem.gif *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Animated_illustration_of_thales_theorem.gif *Licencia:* Public domain *Contribuyentes:* dino (talk) (Boulder, CO, USA)

Archivo:Thales' Theorem.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Thales'_Theorem.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Inductiveload

Archivo:Thales' Theorem Tangents.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Thales'_Theorem_Tangents.svg *Licencia:* Public Domain *Contribuyentes:* Inductiveload

Archivo:Thales theorem 6.png *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Thales_theorem_6.png *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* Cflm001, Dake, HB, STyx, 4 ediciones anónimas

Archivo:Teorema de Varignon.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Varignon.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Magister Mathematicae

File:Teorema de Varignon - Prueba - 1.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Varignon_-_Prueba_-_1.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Magister Mathematicae

File:Teorema de Varignon - Prueba - 2.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Varignon_-_Prueba_-_2.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Magister Mathematicae

File:Teorema de Varignon - Prueba - 3.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Varignon_-_Prueba_-_3.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Magister Mathematicae

File:Teorema de Varignon - Prueba - 4.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Varignon_-_Prueba_-_4.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Magister Mathematicae

File:Teorema de Varignon - Prueba - 5.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Varignon_-_Prueba_-_5.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Magister Mathematicae

File:Teorema de Varignon - Prueba - 6.svg *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Teorema_de_Varignon_-_Prueba_-_6.svg *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* User:Magister Mathematicae

Archivo:Vivani.svg *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Vivani.svg> *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* Salix alba

Archivo:Flammability diagram methane.png *Fuente:* http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Flammability_diagram_methane.png *Licencia:* Creative Commons Attribution-Sharealike 3.0 *Contribuyentes:* Power.corrupts

Archivo:Pascal'sTheoremLetteredColored.PNG *Fuente:* <http://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Archivo:Pascal'sTheoremLetteredColored.PNG> *Licencia:* GNU Free Documentation License *Contribuyentes:* AnonMoos, Maksim

Licencia

Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported
[//creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/)
